ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 14 FÉVRIER 1938.

PRÉSIDENCE DE M. AIMÉ COTTON.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'inversion des opérateurs linéaires bornés appartenant aux troisième et quatrième classes de Tœplitz.* Note de M. **Gaston Julia**.

La présente Note fait suite à celle qui a paru précédemment ([1]), le lecteur est prié de s'y reporter pour les notations.

1. *La troisième classe* de Tœplitz est composée des opérateurs bornés pour lesquels $n(AA^\star)=0$, $n(A^\star A)>0$. Elle est corrélative de la deuxième, et s'y ramène en permutant A et $A^\star$.

$AX=0$ n'a pas de solution $X\neq 0$. $A^\star X=0$ a des solutions $X\neq 0$ remplissant la variété linéaire fermée $H-V^\star$, complémentaire de la variété fermée $V^\star=[A_1, A_2, \ldots]$, laquelle ne remplit pas H; $V^\star\subset H$. $\lambda=0$ appartient au *spectre ponctuel* de $A^\star$. On a $\Delta_{A^\star}=H$, $\Delta_A=V^\star\subset H$. $\lambda=0$ appartient au *spectre résiduel de* A.

Soit $B^\star Y$ la solution de module minimum de $A^\star X=Y$. On aura $\Delta_{B^\star}=V^\star$, $\Delta_B=H$, et AY sera la solution de module minimum de $BX=Y$.

Entre $V^\star$ et H on a deux correspondances biunivoques, la première définie par

$$\begin{cases} Y=A^\star X \\ X=B^\star Y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H=A^\star(V^\star) \\ V^\star=B^\star(H) \end{cases},$$

la deuxième définie par

$$\begin{cases} Y=BX \\ X=AY \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H=B(V^\star) \\ V^\star=A(H) \end{cases}.$$

([1]) *Comptes rendus*, **206**, 1938, p. 388.

On a $BA = A^*B^* = 1$ et $AB = B^*A^* = P_{V^*}$.

On sait que $AC = 1$ est impossible, et que $CA = 1$ a une infinité de solutions. Mais le système $\boxed{BA = 1, \quad AB = \text{Projecteur}}$ a une *solution unique*, et l'on a $AB = P_{V^*}$.

La réciprocité entre A et B est parfaite. $n(BB^*) > 0$, $n(B^*B) = 0$. B est de 2e classe lorsque A est de 3e, et réciproquement.

2. La 4e *classe* de Tœplitz est formée des A bornés pour lesquels $n(AA^*) = 0$, $n(A^*A) = 0$. Aucun inverse borné de A, à droite ou à gauche; $AC = 1$, comme $CA = 1$, sont impossibles pour C borné.

1° Ce cas se subdivise en 4 autres cas :

a. Les systèmes $AX = 0$ et $A^*X = 0$ peuvent avoir tous deux des solutions $X = 0$. *Exemple :* tous les projecteurs.

b. $A^*X = 0$ peut avoir des solutions $X \neq 0$ sans que $AX = 0$ en aie. *Exemple :* l'opérateur B, inverse borné du A non borné considéré, d'après E. Schmidt dans la précédente Note, au n° 3.

c. $AX = 0$ peut avoir des solutions $X \neq 0$ sans que $A^*X = 0$ en aie. *Exemple :* l'opérateur B^*, associé à B de *b*.

d. $AX = 0$ et $A^*X = 0$ peuvent n'avoir aucune solution $X \neq 0$.

Exemple : l'opérateur hermitien, considéré par Hilbert, dont la matrice est $\|a_{ik}\|$, avec $a_{ik} = 0$ pour $i \neq k-1$ et $i \neq k+1$, $a_{ik} = 1$ pour $i = k-1$ et $i = k+1$.

2° On ne peut affirmer, comme pour les trois premières classes, que les domaines de valeurs Δ_A et Δ_{A^*} soient fermés.

Dans le cas *b* on est sûr que Δ_{A^*} *n'est pas fermé* et qu'il est *dense dans tout* H. $\lambda = 0$ appartient au *spectre ponctuel de* A^*, au *spectre résiduel de* A.

Dans le cas *c* on est sûr que Δ_A *n'est pas fermé* et qu'il est *dense dans tout* H. $\lambda = 0$ appartient au *spectre ponctuel de* A, au *spectre résiduel de* A^*.

Dans le cas *d* on est sûr que Δ_A *et* Δ_{A^*} *ne sont pas fermés* et qu'ils sont *denses dans tout* H; ils correspondent à H de façon biunivoque. $\lambda = 0$ appartient au *spectre continu de* A.

3° Soit $\mathcal{V}$ une *variété linéaire fermée quelconque intérieure à* Δ_A. On peut toujours trouver B, borné, tel que $AB = P_{\mathcal{V}}$. L'inversion de A, *sur* $\mathcal{V}$, est toujours possible par opérateur B borné; hors de $\mathcal{V}$, l'opérateur B ne peut fournir d'inverse de A, mais la relation impossible $AB = 1$ est remplacée par une relation similaire simple, précise, AB devenant un *projecteur sur la variété linéaire* $\mathcal{V}$. [H débordant Δ_A, $AB = P_H = 1$ est impossible *a priori*, puisque $AB = P_{\mathcal{V}}$ exige que $\mathcal{V} \subset \Delta_A$, comme conséquence de $ABX = P_{\mathcal{V}}X$ pour tout X.]

Simplifions l'exposé en supposant que $AX = 0$ n'ait pas de racine $X \neq 0$, B est *unique*. Soit $\mathcal{V}'$ la variété des X tels que AX appartienne à $\mathcal{V}$ lorsque X appartient à $\mathcal{V}'$. Il y a correspondance biunivoque entre $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}$ par

$$\begin{cases} Y = AX \\ X = BY \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \mathcal{V} = A(\mathcal{V}') \\ \mathcal{V}' = B(\mathcal{V}) \end{cases}.$$

Mais, *en général, on n'a pas* $BA = P_{\mathcal{V}'}$, comme on pouvait l'espérer. *On a, à la fois,* $AB = P_{\mathcal{V}}$ *et* $BA = P_{\mathcal{V}'}$, *lorsque* Δ_A *est fermé et* $\mathcal{V} = \Delta_A$. Donc *si* Δ_A *est fermé*, on peut réaliser, par B borné, l'inversion de A *sur* Δ_A, et l'on généralise ici complètement les faits de la 2ᵉ classe, où $\mathcal{V} = \Delta_A = H$, $\mathcal{V}' = V$.

3. La démonstration des possibilités précédentes tient au théorème suivant, qui généralise le théorème connu d'Hellinger-Tœplitz.

Lorsque A *est borné*, si Δ_A est fermé, *l'inverse* A^{-1} *de* A *est* borné sur Δ_A, *et on peut le prolonger*, dans tout l'espace H, *par un opérateur borné* B, *car un opérateur défini sur toute une variété linéaire fermée* $\mathcal{V}$ *par des formules linéaires du type* $y_i = (\alpha_i, X)$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$, *est nécessairement* borné sur $\mathcal{V}$. *Lorsque* Δ_A *n'est pas fermé, l'inverse de* A *est borné* sur toute $\mathcal{V}$ fermée intérieure à Δ_A, il ne l'est pas sur Δ_A.

4. La recherche précédente procède essentiellement des deux remarques suivantes :

1° Considérer l'opérateur 1 comme projection sur H;

2° Lorsque $AB = 1$ est impossible pour B borné, c'est que H *déborde* Δ_A; il faut alors se restreindre à $AB = P_{\mathcal{V}}$, la variété linéaire fermée $\mathcal{V}$ étant *contenue dans* Δ_A, et le problème devient alors toujours possible avec B borné.

On réalise le maximum du possible, lorsque Δ_A est fermé, avec $\mathcal{V} = \Delta_A$. Lorsque Δ_A n'est pas fermé, on l'approchera de plus en plus avec des $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{V}_n \subset \ldots \subset \Delta_A$, et l'on approchera l'inverse A^{-1} de A, non borné sur Δ_A, par les B_n, bornés dans tout H, tels que $AB_n = P_{\mathcal{V}_n}$. On remplace ainsi un problème d'inversion, impossible *a priori*, par des problèmes possibles, plus restreints, tout aussi précis que le problème initial, et qui coïncident avec le problème initial lorsqu'il devient possible, conformément au principe de toute généralisation rationnelle.

D'autres conséquences des principes précédents seront développées ailleurs.

ASTRONOMIE STELLAIRE. — *Sur la rotation de la galaxie.* Note de M. **Ernest Esclangon**.

La rotation de la galaxie a donné lieu à des recherches dont les résultats restent peu concordants.

En 1913, j'avais envisagé ce problème et d'importants travaux de calculs furent exécutés à l'Observatoire de Bordeaux, en partant du Catalogue de Boss contenant les mouvements propres apparents de 6000 étoiles. Dans la résolution des quelques centaines d'équations résultant de la mise en œuvre de ces données, j'avais introduit comme indépendantes des inconnues qui ne l'étaient pas réellement, telles que seraient par exemple x^2, y^2, xy, de sorte que, après résolution, les relations de dépendance devaient se vérifier numériquement. C'est là une précaution utile lorsqu'il s'agit de confronter des hypothèses et des théories avec des observations, vis-à-vis desquelles la comparaison des résidus et des inconnues reste d'une interprétation délicate. Les vérifications ne se produisaient pas. Il est vrai qu'à cette époque, les mouvements propres, les parallaxes stellaires, et surtout les vitesses radiales, étaient relativement rares et mal connus.

Il n'est pas inutile de préciser la manière dont le problème a été généralement posé. En fait et en raison même des seules données précises d'observation, l'étude n'a pu porter que sur les étoiles relativement proches du Soleil, dans un rayon de quelques centaines de parsecs autour de celui-ci, donc dans un *volume très petit* E par rapport aux dimensions de la galaxie (de 50 à 100 fois plus étendue linéairement). Supposons qu'au voisinage immédiat de *chaque point* M du volume E on ait suffisamment d'étoiles à éléments connus, qu'on détermine la moyenne de leur vitesse qu'on fera ainsi correspondre au point M. On aura donc défini, dans le petit volume E, un champ continu de vecteurs vitesses. Les observations pouvant être considérées comme faites à partir du Soleil S, celui-ci, tout en participant au mouvement d'ensemble, pourra avoir, en raison de son individualité propre, et aura réellement, une vitesse différente de celle qui, en S, correspond au champ continu des vecteurs.

Une remarque préalable est à faire. A quel système de référence sont rapportées les vitesses V ? Les vitesses radiales sont évidemment indépen-

dantes de tout système choisi, mais parallaxes et mouvements propres apparents sont en outre nécessaires pour déterminer les vitesses V.

L'Astronomie de position précise des nébuleuses spirales, extérieures et éloignées de la Voie Lactée, étant *actuellement* inexistante, lacune importante à combler dans l'avenir, c'est dans la Voie Lactée elle-même qu'il faut prendre, et que sont pris en effet, les axes de référence ; ils sont même rapportés à des étoiles relativement proches, qui seules ont été l'objet d'observations assez nombreuses pour en fixer les positions avec une suffisante approximation. Au point de vue de l'Astronomie de position, le système galactique reste en quelque sorte isolé, sans possibilité de comparaison précise, avec l'ensemble des nébuleuses lointaines ; on ne saurait donc, pour l'instant, y définir des rotations absolues. Il faudrait, pour aller plus loin, faire état d'accélérations dues à la rotation et dont il ne saurait être question. Bornons-nous au champ des vitesses défini dans le petit volume E, ces vitesses étant rapportées au système de référence effectivement choisi. Ce champ permet de caractériser, dans un petit intervalle de temps (quelques centaines d'années par exemple), la déformation de l'espace E, qui, on le sait, comporte une *translation*, une *rotation*, une *déformation pure*. *A priori*, on ne peut rien dire sur ces éléments, qu'il faut envisager dans toute leur généralité.

Oort, en 1927, fait l'hypothèse que les vitesses observées dans le volume E pourraient résulter de mouvements de rotation autour d'un axe fixe PQ normal au plan de la galaxie et passant par son centre (très éloigné de E), à la manière d'une infinité d'anneaux concentriques tournant à des vitesses angulaires différentes ω, fonctions de la distance R à l'axe PQ.

Si l'on prend comme origine le Soleil, comme plan xoy un plan parallèle au plan de la galaxie, et si $x_0 = R_0 \cos\varphi$, $y_0 = R \sin\varphi$ sont les coordonnées de l'axe de rotation PQ, on aura donc, à un instant donné, pour la vitesse absolue en un point x, y, z de l'espace E (vitesse du Soleil exceptée)

$$(1) \qquad u = -\omega(y - y_0), \qquad v = \omega(x - x_0), \qquad w = 0.$$

Comme R est grand par rapport à x, y, on pourra écrire

$$(2) \qquad R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R_0 - \frac{(xx_0 + yy_0)}{R_0} + \frac{(xy_0 - yx_0)^2}{2R_0^3} + \ldots,$$

et, pour la vitesse de rotation (dans le volume E),

$$(3) \qquad \omega = \omega_0 + A(R - R_0) + B(R - R_0)^2 + \ldots,$$

d'où, abstraction faite de certaines constantes,

$$(4)\quad \begin{cases} u = \omega_0 y_0 - \omega_0 y - \dfrac{A y_0}{R_0}(x x_0 + y y_0) \\ \qquad + \dfrac{A}{2R_0^3}[2R_0^2 y(x x_0 + y y_0) + y_0(x y_0 - y x_0)^2] + \dfrac{B y_0}{R_0^2}(x x_0 + y y_0)^2 + \ldots, \\ v = -\omega_0 x_0 + \omega_0 x + \dfrac{A x_0}{R_0}(x x_0 + y y_0) \\ \qquad - \dfrac{A}{2R_0^3}[2R_0^2 x(x x_0 + y y_0) + x_0(x y_0 - y x_0)^2] - \dfrac{B x_0}{R_0^2}(x x_0 + y y_0)^2 + \ldots, \\ w = 0, \end{cases}$$

Ces formules, bien connues, pourront être confrontées avec les vitesses radiales ou les mouvements propres (la vitesse angulaire absolue ω_0 s'élimine dans ces comparaisons), mais une remarque essentielle s'impose. Les vitesses radiales expriment des *variations de distance*, indépendantes par conséquent du système de référence; les mouvements propres, des *dilatations angulaires* vis-à-vis d'axes liés à la Voie Lactée et même pratiquement au petit volume E en voie de lente déformation. Les valeurs des paramètres, figurant dans (4), obtenues par les mouvements propres, pourront donc dépendre du choix de ces axes, et l'on peut concevoir que Oort les ait trouvées différentes de celles tirées des vitesses radiales. H. Mineur a représenté ce défaut de concordance, en faisant l'hypothèse que la vitesse angulaire ω, et par suite ω_0, A, B, sont fonctions de z, fonctions dont le choix toutefois reste nécessairement arbitraire et peut être plus ou moins justifié; ce qui fournit en définitive des paramètres supplémentaires utilisables, mais dont le sens de réalité physique reste sujet à discussion. Dans toutes ces recherches, l'analyse des résidus reste délicate et demande une critique très rigoureuse.

Les hypothèses précédentes entraînent des conditions analytiques pour la *déformation pure* attachée aux mouvements continus de l'espace E. Les axes de l'ellipsoïde des dilatations, dans le plan galactique par exemple, doivent être, quel que soit $\omega(R)$, inclinés à 45° sur les vitesses (abstraction faite d'une vitesse de translation), et correspondent, l'un à une *dilatation* égale à $\pm(R/2)(d\omega/dR)\,dt$, l'autre à une *contraction égale* [1]. Ces propriétés

---

[1] Cela résulte du fait que le champ des vitesses, dans l'hypothèse admise, satisfait à la propriété d'ailleurs plus générale $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$, ou $u = -\partial\Phi/\partial y$, $v = +\partial\Phi/\partial x$, propriété invariante par translation et rotation. Les vitesses sont ainsi tangentes aux courbes $\Phi = \text{const.}$

caractérisent spécifiquement en quelque sorte le genre de représentation adopté, à savoir un ensemble continu de rotations annulaires autour d'un axe fixe.

Mineur ([2]) a publié une représentation analytique et géométrique du champ de vitesses (étoiles B) correspondant à un volume E d'un rayon de 300 parsecs autour du Soleil. L'examen de cette représentation conduit aux remarques suivantes :

1° Les déformations pures sont très importantes et ne répondent pas au critère caractéristique formulé ci-dessus. En particulier la déformation pure, au centre de E, se réduit à une dilatation unique dans un sens faisant l'angle de $+19°$ avec ox (dilatation nulle dans le sens perpendiculaire). Les étoiles B, dans le voisinage du Soleil, seraient ainsi en *extension* cylindrique.

2° Les lieux d'égale rotation (d'isorotation), qui devraient être des cercles ayant leur centre sur l'axe (éloigné) de la galaxie, sont des hyperboles homothétiques à centre au contraire très rapproché (moins de 200 parsecs), en supposant toutefois que le système de référence n'est pas lui-même l'objet de déformations propres.

Les incertitudes qui subsistent sur les valeurs des vitesses moyennes, et sur l'indéformabilité du système de référence auquel elles sont en fait rapportées, ne permettent pas évidemment de donner un sens de réalité absolue à ces conclusions, mais on ne saurait, encore moins semble-t-il, en conclure que l'axe de la galaxie est un axe de rotation commun à tous les éléments de l'espace E. Il est vraisemblable qu'en dehors de la possibilité, et même de la probabilité d'une rotation d'ensemble, la voie lactée comporte en ses diverses régions des mouvements locaux de caractère plus ou moins complexe correspondant à des déformations pour ainsi dire spéciales à chacune d'elles. La question pourra faire un grand pas, lorsque des observations de position *très précises* pourront être obtenues sur les nébuleuses lointaines.

([2]) *Bulletin Astronomique*, 9, 1934, p. 50.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Équations approchées des mouvements trois-dimensionnels d'un fluide parfait compressible.* Note de M. **Dimitri Riabouchinsky.**

Considérons un mouvement permanent défini par les équations

$$(1)\quad \varphi_1 = x_1 + \alpha f(x_1, y_1, z_1), \qquad \psi'_1 = y_1 + \alpha f_1(x_1, y_1, z_1), \qquad \psi'_2 = z_1 + \alpha f_2(x_1, y_1, z_1),$$

où

$$\varphi_1 q_1 h = \varphi, \qquad \psi'_1 \sqrt{q_1} h = \psi_1, \qquad \psi'_2 \sqrt{q_1} h = \psi_2, \qquad x_1 h = x, \qquad y_1 h = y, \qquad z_1 h = z.$$

φ est le potentiel des vitesses, ψ_1, ψ_2 les fonctions de courant [1], q_1 une vitesse et h une longueur. Nous supposerons que le paramètre α est assez petit pour qu'on puisse négliger les membres ayant comme facteur une puissance de α supérieure à la première. Il en résulte qu'un mouvement défini par les équations (1) l'est également, avec la même approximation, par les équations

$$(2)\quad x_1 = \varphi_1 - \alpha f(\varphi_1, \psi'_1, \psi'_2), \qquad y_1 = \psi'_1 - \alpha f_1(\varphi_1, \psi'_1, \psi'_2), \qquad z_1 = \psi'_2 - \alpha f_2(\varphi_1, \psi'_1, \psi'_2).$$

Cette inversion est importante car elle donne, dès que les fonctions f, f_1, f_2 sont déterminées, les équations des lignes de courant et celles des surfaces équipotentielles sous une forme paramétrique. En substituant les expressions (1) dans les équations (4) de la page 296 de la Note précitée, définissant les composantes $u = q_1 u_1$, $v = q_1 v_1$, $w = q_1 w_1$ de la vitesse q, et en remarquant que

$$\frac{\rho_1}{\rho} = 1 + \alpha \frac{q_1^2}{c_1^2} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad p = p_1 - \alpha \rho_1 q_1^2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1},$$

où c_1 est la célérité du son en un point où la vitesse est q_1, la densité ρ_1 et la pression P_1, il vient

$$\frac{u_1 - 1}{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{q_1^2}{c_1^2} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2}{\partial z^1} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_1},$$

$$\frac{v_1}{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial y_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1}, \qquad \frac{w_1}{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial z_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1}.$$

---

(1) *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 295-297; *C. R. Congrès intern. Math.*, Zurich, 2, 1932, p. 297.

Les fonctions conjuguées f, f_1, f_2 doivent donc satisfaire aux conditions

$$(3) \qquad \varkappa^2 a^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1},$$

où $\varkappa^2 a^2 c_1^2 = q_1^2 - c_1^2$. Selon que le mouvement est subsonique, sonique ou supersonique, il faut poser respectivement $\varkappa^2 a^2 = -a^2, 0, +a^2$. On peut adjoindre aux équations (3) l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z_1} = \frac{\partial f_2}{\partial y_1},$$

qu'on déduit des deux dernières de ces équations. Nous avons supprimé dans l'équation (4) la fonction additive arbitraire de y_1, z_1, car cette fonction ne figure pas dans les développements qui suivent. Il résulte des équations (3), (4) que chacune des fonctions conjuguées f, f_1, f_2 est une solution de l'équation

$$(5) \qquad -\varkappa^2 a^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} = 0$$

qui se ramène, dans le cas des mouvements subsoniques, à l'équation de Laplace et, dans le cas des mouvements supersoniques, à l'équation des vibrations d'une membrane et des mouvements ondulatoires à la surface d'un liquide pesant.

Dans le cas des mouvements supersoniques, $\varkappa^2 = 1$, les équations (3) permettent de donner une interprétation mécaniste des équations de Maxwell. Cette remarque, et celles que j'ai faites dans des Notes antérieures [2], rentrent dans le cadre d'un nouveau chapitre de la physique, celui de la *physique supersonique*.

On peut satisfaire au système d'équations (3), (4), (5) en posant

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f = \mathcal{F}(\zeta) + \mathcal{F}(\bar{\zeta}), \qquad f_1 = -\varkappa a a_1[\mathcal{F}(\zeta) - \mathcal{F}(\bar{\zeta})], \\ f_2 = -\varkappa a a_2[\mathcal{F}(\zeta) - \mathcal{F}(\bar{\zeta})], \qquad a_1^2 + a_2^2 = 1, \\ \zeta = x_1 + \varkappa a(a_1 y_1 + a_2 z_1), \qquad \bar{\zeta} = x_1 - \varkappa a(a_1 y_1 + a_2 z_1). \end{array} \right.$$

Dans les mouvements subsoniques $\varkappa = i = \sqrt{-1}$ et dans les mouvements supersoniques $\varkappa = j = 1$. Les équations (3) et (6) présentent aussi un intérêt mathématique intrinsèque, car elles étendent la théorie bidimensionnelle des fonctions conjuguées de la théorie des fonctions des variables

(2) *Comptes rendus*, **202**, 1936, p. 891 et 1889; **205**, 1937, p. 1117.

complexes $x+iy$, $x+ky$, $x+jy$ aux domaines à trois dimensions. On passe ensuite facilement aux espaces à n dimensions en considérant le potentiel des vitesses φ et $(n-1)$ *fonctions de courant* $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$, comme fonctions de n coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Toutes les conditions du problème trois-dimensionnel considéré étant linéaires, il en résulte que, si l'on a n solutions $(f, f_1, f_2)_1$, $(f, f_1, f_2)_2$, ..., $(f, f_1, f_2)_n$, on en obtient une nouvelle en les ajoutant et l'on peut écrire, en effectuant l'inversion (2),

$$(7) \begin{cases} x_1 = \varphi_1 - \alpha \sum_\nu [\mathcal{F}_\nu(w_\nu) + \mathcal{F}_\nu(\overline{w}_\nu)], \qquad y_1 = \psi'_1 - \alpha \varkappa a \sum_\nu a_{1\nu}[\mathcal{F}_\nu(w_\nu) - \mathcal{F}_\nu(\overline{w}_\nu)], \\ z_1 = \psi'_2 - \alpha \varkappa a \sum_\nu a_{2\nu}[\mathcal{F}_\nu(w_\nu) - \mathcal{F}_\nu(\overline{w}_\nu)], \qquad a_{1\nu}^2 + a_{2\nu}^2 = 1, \\ w_\nu = \varphi_1 + \varkappa a(a_{1\nu}\psi'_1 + a_{2\nu}\psi'_2), \qquad \overline{w}_\nu = \varphi_1 - \varkappa a(a_{1\nu}\psi'_1 + a_{2\nu}\psi'_2). \end{cases}$$

Les fonctions $\mathcal{F}_\nu$ sont des fonctions arbitraires de w_ν ou $\overline{w}_\nu$ et des constantes β_ν ($a_{1\nu} = \cos\beta_\nu$, $a_{2\nu} = \sin\beta_\nu$). On démontre que la solution la plus générale du problème considéré peut être obtenue par ce procédé, en employant un raisonnement semblable à celui de E.-T. Whittaker (*Modern Analysis*) dans la démonstration que la solution la plus générale de l'équation $\Delta\varphi = 0$ peut être obtenue par une superposition de solutions du type

$$\varphi = f(\alpha x + \beta y + \gamma z), \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

Appliquons les équations (7) à deux exemples. Considérons d'abord le cas d'un jet symétrique par rapport à son axe. Posons $\psi'_1 = \psi\cos\theta$, $\psi'_2 = \psi\sin\theta$, $y_1 = r_1\cos\theta$, $z_1 = r_1\sin\theta$ et passons des sommes aux intégrales en faisant varier β_ν d'une façon continue. En effectuant l'intégration de $\beta - \theta = -\pi$ à $\beta - \theta = \pi$, en donnant à θ une valeur constante, du reste, en raison de la symétrie du mouvement, arbitraire, il vient

$$x_1 = \varphi_1 - \alpha\cos\varphi_1 J_0(a\psi), \qquad r_1 = \psi - \alpha a \sin\varphi_1 J_1(a\psi),$$
$$P - p_1 = \alpha\rho q_1^2 \sin\varphi_1 J_0(a\psi).$$

La première de ces équations peut être aussi obtenue en effectuant l'inversion (2) de l'équation du potentiel des vitesses d'un jet de section circulaire de L. Prandtl [3].

Je mentionnerai encore le problème d'un jet de section anguleuse avec

---

[3] *Physikalische Zeitschrift*, 5, 1904, p. 599.

ondes de choc. J'ai étudié en détail le problème d'un jet dont les sections droites oscillent le long de l'axe du jet entre un octogone concave et un octogone convexe, formant étoile, en passant périodiquement par des sections intermédiaires rectangulaires.

M. **Georges Perrier** fait hommage à l'Académie de son Ouvrage *La République de l'Équateur*.

M. **Gabriel Bertrand** fait hommage à l'Académie d'un Volume intitulé *Journées de la lutte chimique contre les ennemis des cultures* organisées par la Société de Chimie industrielle et le Centre de perfectionnement technique.

M. **Charles Fabry**, comme Président du *Conseil international des Unions scientifiques*, fait hommage à l'Académie d'un volume relatif à la *Troisième assemblée générale* de ce Conseil, tenue à Londres du 24 avril au 3 mai 1937. Avec les documents administratifs relatifs à l'Union, on y trouve une très belle conférence de M. Nörlund, Président sortant, sur *La figure de la Terre* et les Rapports sur l'activité des diverses Unions scientifiques.

M. **Maurice d'Ocagne** fait hommage à l'Académie, de la part de l'auteur, M. Georges Maes, d'un Ouvrage intitulé *L'organisation du calcul mécanique dans les bureaux*, dont il a écrit la *Préface*. C'est un essai de substitution à l'emploi empirique des machines à calculer, dans la pratique des bureaux, d'un emploi fondé sur des méthodes précises résultant de recherches expérimentales et scientifiques.

M. **Frédéric Marguet** fait hommage à l'Académie d'un exemplaire de la 4e édition, qui vient de paraître, de son *Cours de Navigation et de Compas de l'École Navale*.

L'Ouvrage renseigne en particulier sur le calcul du *Point Azimutal*, dans lequel on utilise soit les relèvements de points terrestres obtenus par les procédés radiogoniométriques, soit les observations précises des azimuts des astres faites au moyen de gyrocompas.

ÉLECTIONS.

Par l'unanimité de 49 suffrages, M. **Antonin Gosset** est élu Membre de la *Section de Médecine expérimentale* du Conseil supérieur de la Recherche scientifique.

CORRESPONDANCE.

M. le **Président de l'Union Géodésique et Géophysique internationale** adresse à l'Académie l'expression de ses sentiments de condoléances à l'occasion du décès de M. *Ch. Lallemand*.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Louis Couffignal. *Sur l'Analyse mécanique. Application aux machines à calculer et aux calculs de la Mécanique céleste* (présenté par M. M. d'Ocagne).

M. **Georges Curasson** adresse des remercîments pour la distinction que l'Académie a accordée à ses travaux.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'indice de Kronecker.* Note (¹) de M. **Stanislas Christian Zaremba**.

La présente Note est consacrée à un théorème pouvant faciliter quelquefois le calcul de l'indice de Kronecker. Ce théorème permet aussi de définir, si l'on veut, l'indice de Kronecker dans toute sa généralité en partant de la notion d'indice sur un circuit plan, notion dont la définition est particulièrement simple et le sens géométrique facilement saisissable. Voici le théorème en question :

(¹) Séance du 7 février 1938.

Soit C un champ continu de vecteurs de l'espace euclidien à $n+1$ dimensions ($n>1$) défini sur une sphère S^n à n dimensions et ne comportant pas de points singuliers sur cette sphère. Soit T le champ des composantes tangentes à S^n des vecteurs du champ C. Les points singuliers de T sont ceux où le vecteur du champ C est normal à S^n. On pourra donc distinguer parmi les points singuliers du champ T ceux de première espèce, où le vecteur du champ C est dirigé vers l'extérieur de S^n et ceux de seconde espèce, où le même vecteur est dirigé vers l'intérieur de S^n. Cela posé, si l'on désigne par q la somme des indices des points singuliers de seconde espèce de T, l'indice i du champ C sur S^n est donné par la formule

$$i=1-q.$$

Cette formule s'applique non seulement au cas où les points singuliers de seconde espèce de T sont isolés, à condition de l'interpréter dans le cas contraire de la façon suivante. La sphère S^n peut être partagée en un nombre fini de régions dont aucune ne contient à la fois de points singuliers de première et de seconde espèce du champ T et dont les frontières ne contiennent aucun point singulier. On désignera alors par q la somme des indices de T sur les frontières des régions contenant des points singuliers de seconde espèce. Le nombre q est ainsi bien défini et manifestement ne dépend pas de la décomposition de S^n dont il vient d'être question. Le seul cas qui reste alors de côté est celui où le champ C est normal à la sphère S^n en tout point de celle-ci; cependant, en le considérant comme un cas-limite, on peut aussi le faire rentrer dans le cadre général.

Dans le cas où les points singuliers de T sont isolés, on démontre le théorème en faisant voir d'abord qu'on peut déformer le champ C de façon que le champ des composantes tangentes à S^n n'ait qu'un seul point singulier de chacune des deux espèces. On en déduit que si les quantités q, calculées pour deux champs vectoriels du type envisagé, sont les mêmes, on peut passer d'un champ à l'autre d'une façon continue sans produire de singularités. L'indice i est donc bien fonction de q, et pour déterminer cette fonction, il suffit de construire une suite appropriée de champs vectoriels. Finalement, au moyen d'une approximation simpliciale appropriée de C, on ramène le cas général à celui dont il vient d'être question.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les combinaisons exceptionnelles des fonctions entières.* Note[1] de M. **Michel Ghermanescu**, présentée par M. Paul Montel.

Nous voulons ajouter quelques résultats nouveaux à ceux établis antérieurement ([2]).

1. Soit un système (f) de fonctions entières $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_\nu(z)$. Nous dirons, avec M. Paul Montel, qu'il est de la même *classe* qu'un autre système (g), si ces deux systèmes sont réductibles l'un à l'autre par une substitution linéaire à coefficients constants. Nous dirons de plus que (f) est de *classe* ρ s'il est réductible à un autre, contenant ρ *fonctions fondamentales* différentes, de la forme $P(z)e^{Q(z)}$, où $P(z)$ est un polynome, et $Q(z)$ une transcendante entière pouvant se réduire à un polynome ou même à une constante.

Ceci défini, nous avons obtenu la proposition suivante :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de fonctions entières admette ρ et seulement ρ combinaisons exceptionnelles fondamentales est qu'il soit de classe ρ.*

En effet, l'existence de ρ relations

$$(1)\qquad F = \mu_1^i f_1 + \mu_2^i f_2 + \ldots + \mu_\nu^i f_\nu = P_i(z)e^{Q_i(z)} \qquad (i=1, 2, \ldots, \rho),$$

avec

$$|\mu_1^1 \mu_2^2 \ldots \mu_\nu^\nu| \neq 0,$$

montre qu'il existe une substitution linéaire, à coefficients constants, permettant le passage du système (f) à un autre (F) contenant ρ fonctions fondamentales $P_i(z)\,e^{Q_i(z)}$.

Réciproquement, si les fonctions (f) ont des expressions de la forme

$$(2)\qquad f_i = c_1^i P_1 e^{Q_1} + \ldots + c_\rho^i P_\rho e^{Q_\rho} + c_{\rho+1}^i g_{\rho+1} + \ldots + c_\nu^i g_\nu \qquad (i=1, 2, \ldots, \nu),$$

avec

$$|c_1^1 c_2^2 \ldots c_\nu^\nu| \neq 0,$$

où g_j sont des fonctions entières différentes des Pe^Q, on en déduit par élimination ρ relations de la forme (1).

([1]) Séance du 7 février 1938.

([2]) *Annales de l'École Normale*, 3e série, 52, III, 1935, p. 221-268.

D'après un résultat déjà établi ([3]), ρ est au plus égal au nombre de fonctions linéairement indépendantes, contenues dans (f).

2. D'après la terminologie adoptée dans le Mémoire cité, les combinaisons exceptionnelles, telles que (1), sont dites *fondamentales*, tandis que celles de la forme

$$(3) \qquad \mathcal{F}_i = \alpha_1^i f_1 + \alpha_2^i f_2 + \ldots + \alpha_\nu^i f_\nu = 0$$

sont dites *primordiales*.

A toute combinaison fondamentale F_i, faisons correspondre le point $M_i(\mu_1^i, \mu_2^i, \ldots, \mu_\nu^i)$, de même qu'à une $\mathcal{F}_i$ le point $P_i(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_\nu^i)$, dans un espace à ν dimensions. M_i, P_i seront des *points exceptionnels* du système (f), les premiers étant *fondamentaux*, les seconds, *primordiaux*.

Tout point des droites OM_i, OP_i est exceptionnel et ces droites seront *exceptionnelles* pour (f). Tout point d'une multiplicité linéaire à s dimensions ([4]), L^s, définie par une droite OM et $s-1$ droites OP_i, est aussi exceptionnel, ainsi que tout point d'une L_1^s, définie par s droites OP_i. Leur nombre total maximum est $C_\lambda^s + (\nu - \lambda) C_\lambda^{s-1}$, λ étant le nombre des $\mathcal{F}_i$. On a ainsi la proposition :

THÉORÈME. — *A tout système (f) de ν fonctions entières, admettant des combinaisons exceptionnelles fondamentales homogènes, correspondent $C_\lambda^s + (\nu - \lambda) C_\lambda^{s-1}$ multiplicités linéaires exceptionnelles L^s au plus, λ étant le nombre des relations linéaires et homogènes à coefficients constants existant entre les (f) et s variant de 1 à $\lambda + 1$.*

Toutes les $L^{\lambda+1}$ ont une Γ_1^λ commune, définie par toutes les droites OP_i. Lorsque $\lambda = 0$, il n'y a que ν droites exceptionnelles au plus, passant par l'origine, à laquelle se réduit L_1^λ.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les limites radiales des fonctions entières.* Note de Mlle **Alice Roth**, présentée par M. Paul Montel.

1. Soit $G(z)$ une fonction entière de la variable $z = re^{i\varphi}$ (où r, φ sont réels, $r \geqq 0$). Supposons que $G(re^{i\varphi})$ tende, lorsque $r \to \infty$, pour chaque valeur de φ, $0 \leqq \varphi < 2\pi$, vers une limite $f(\varphi)$ finie ou infinie, fonction du

([3]) *Loc. cit.*, p. 248.

([4]) Autrement dit, un $(s-1)$ — plan, d'après la terminologie de Guichard.

point $z = e^{i\varphi}$ sur le cercle unité C. Je nomme cette fonction

$$f(\varphi) = \lim_{r \to 1} G(re^{i\varphi})$$

la *limite radiale* de la fonction entière G(z). La limite radiale est évidemment une fonction de classe 1, c'est-à-dire la limite d'une suite convergente de fonctions continues. Toutes les fonctions de classe 1, définies sur le cercle C, sont-elles limites radiales de fonctions entières ?

I. *Pour qu'une fonction de classe* 1, *finie en chaque point du cercle* C, *soit la limite radiale d'une fonction entière, il faut et il suffit que l'ensemble de de ses intervalles de constance soit partout dense sur le cercle* C.

II. *Pour qu'une fonction qui ne prend sur le cercle* C *qu'un nombre fini de valeurs* (dont une peut être ∞) *soit la limite radiale d'une fonction entière, il faut et il suffit qu'elle soit de classe* 1, *donc, il faut et il suffit qu'elle prenne chaque valeur dans un ensemble qui est la somme d'une suite dénombrable d'ensembles fermés.*

2. Le théorème II résout une question suggérée par MM. Pólya et Szegö (*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, 2, p. 33). La nécessité de la condition énoncée au théorème I résulte facilement de la combinaison d'un résultat de M. Bohr (*Opuscula mathematica A. Wiman dedicata*, p. 39-46, voir p. 40) avec un théorème bien connu de M. Montel (*Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, 29, p. 487-535, voir p. 519). Pour démontrer qu'elle est suffisante, je construis des fonctions entières ayant des limites radiales données en me servant de certaines parties des théorèmes suivants, extensions d'un résultat de M. Carleman (*Arkiv. för Matematik, Astronomi och Fysik*, 20 B, n° 4) :

III. *Étant donné* 1° *un ensemble* S *de demi-droites, issues de l'origine, ensemble fermé et nulle part dense dans le plan;* 2° *une fonction* $f(z)$, *continue sur l'ensemble* S; 3° *une fonction positive* $\varepsilon(r)$ *de la variable positive* r, *qui tend vers* 0 *pour* $r \to \infty$, *on peut trouver une fonction entière* G(z), *telle que l'on ait* $|G(z) - f(z)| < \varepsilon(|z|)$ *sur* S.

IV. *Soit* D_1, D_2, ... *une suite de domaines fermés et non bornés du plan, sans points communs deux à deux, telle que la somme* $\sum_{n=1}^{\infty} D_n$ *soit fermée et que le point à l'infini soit accessible dans chacun des domaines ouverts dont se compose l'ensemble complémentaire de* $\sum_{n=1}^{\infty} D_n$. *Étant donné en outre une suite de fonctions* $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., *où la fonction* $f_n(z)$ *est holomorphe dans le*

domaine $D_n(n = 1, 2, \ldots)$, *il existe pour chaque nombre positif* ε *une fonction entière* $G(z)$, *telle que l'on ait*

$$|G(z) - f_n(z)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \lim_{|z| \to \infty} |G(z) - f_n(z)| = 0$$

dans le domaine $D_n(n = 1, 2, \ldots)$.

3. Je saisis l'occasion de communiquer le résultat suivant :

V. *Étant donné* 1° *un ensemble* M, *fermé, nulle part dense dans le plan, de mesure superficielle nulle;* 2° *une fonction* $f(z)$, *continue sur l'ensemble* M; *et* 3° *une fonction positive* $\varepsilon(r)$ *de la variable positive* r, *qui tend vers* 0 *pour* $r \to \infty$, *il existe une fonction méromorphe* $F(z)$, *pour laquelle* $|F(z) - f(z)| < \varepsilon(|z|)$ *sur* M.

Dans le cas particulier où les ensembles S et M considérés dans les théorèmes III et V sont bornés, ces théorèmes se réduisent à des résultats contenus dans des recherches bien connues de M. Lavrentieff et de MM. Hartogs et Rosenthal. Tandis que l'ensemble S du théorème III peut avoir une mesure superficielle positive, *la condition que l'ensemble* M *du théorème* V *soit de mesure superficielle nulle est essentielle*, car on peut montrer que *le théorème* V *n'est plus valable, si l'on supprime cette condition* sans la remplacer par une autre.

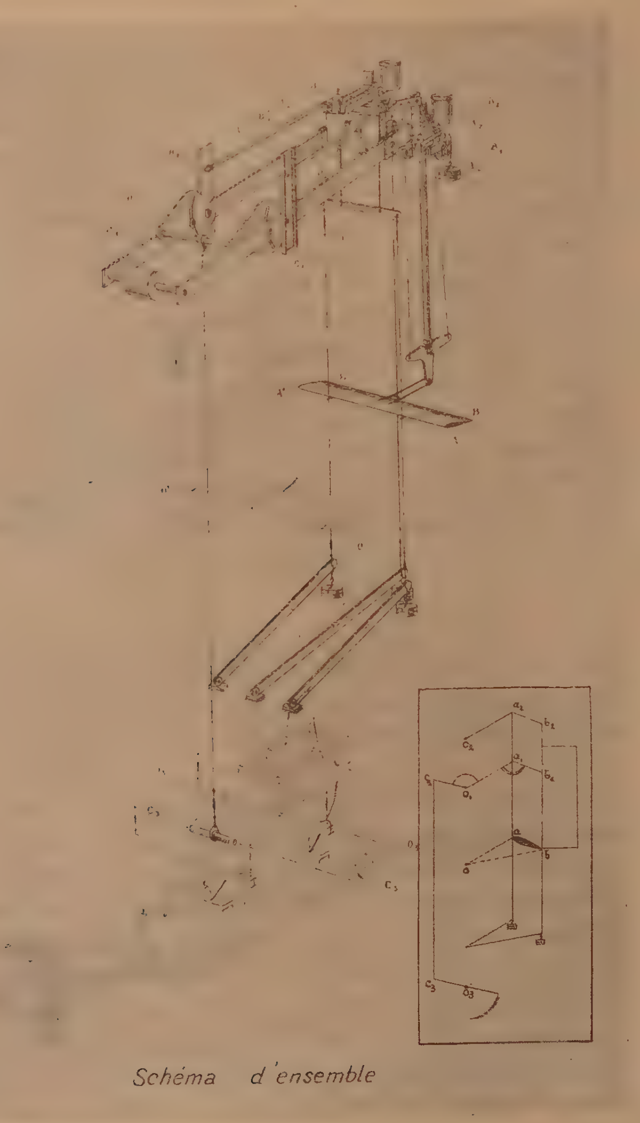
MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Sur un dispositif permettant la mesure simultanée des réactions sur deux voilures juxtaposées.* Note [1] de M. **Michel Scherer**, présentée par M. Henri Villat.

Un essai courant en soufflerie s'effectue en soufflant à vitesse constante, et en faisant varier l'incidence de la maquette par rapport au vent. La balance principale de l'Institut Aérotechnique de Saint-Cyr donne l'enregistrement continu des efforts en six composantes. La maquette essayée est suspendue à un réseau de fils et tourne pendant l'essai autour de l'axe OO'. Le problème posé était de réaliser une balance complémentaire, qui, tout en enregistrant les efforts sur une voilure placée en aval de la première maquette, lui ferait exécuter la rotation autour de OO' en synchronisme avec celle-ci, de façon qu'au cours de l'essai, l'ensemble des deux maquettes forme un système indéformable. La balance réalisée permet la mesure de

---

[1] Séance du 7 février 1938.

trois composantes, deux de poussée et une de traînée. Deux ensembles principaux constituent cette balance :


Schéma d'ensemble

1° *Dynamomètres et systèmes d'attaches.* — La maquette est suspendue par deux fils verticaux reliés au bord d'attaque (fil de poussée avant), et un au bord de fuite (fil de poussée arrière). Ces fils sont tendus par des

contre-poids à leur extrémité inférieure et fixés à leur extrémité supérieure à des dynamomètres à faible course d'un modèle déjà décrit, imaginés par M. Gruson (Denis, *Com. aux journées sc. et tech. de Méc. des fluides de Lille*). Les efforts de traînée sont encaissés par un bras rigide placé en aval de l'ensemble. Deux biellettes horizontales articulées autour de l'axe BB′ transmettent l'effort à un dynamomètre par l'intermédiaire d'un renvoi de sonnette fixé à l'extrémité du bras.

2° *Réglage et entraînement.* — Dans le plan de symétrie vertical du tunnel, considérons les traces de l'axe OO′ et des axes AA′ et BB′ passant par les points d'attache avant et arrière de la seconde voilure; nous obtenons un triangle oab; imaginons un triangle $o_1a_1b_1$, rigide, dérivé de oab, par une translation, telle que o, o_1 soient sur une même verticale. Nous voyons qu'il suffit de fixer les fils avant dans un plan transversal passant par a, a_1 et le fil arrière sur b, b_1 pour qu'une rotation de oab autour de o soit produite par une rotation égale de $o_1a_1b_1$ autour de o_1. L'utilisation des dynamomètres exigeant des plateformes de direction fixe, nous adjoignons à $o_1a_1b_1$ un triangle $o_2a_2b_2$ dérivé du précédent par une translation telle que o, o_1, o_2 soient sur la même verticale. Les segments a_1a_2 et b_1b_2 reliés entre eux restent verticaux pendant le mouvement. La synchronisation des mouvements des deux balances est obtenue en rigidifiant avec $o_1a_1b_1$ un segment o_1c_1 parallèle au bras o_3c_3 de la balance principale et en reliant c_1c_3 par un fil. La balance principale entraîne ainsi l'ensemble. On a vérifié que les mesures effectuées avec une voilure placée sur la balance complémentaire sont identiques à celles trouvées pour la même voilure avec la balance habituelle. Le dispositif décrit va permettre l'étude aérodynamique des ensembles rigides constitués par deux ailes en tandem ou par une aile et un empennage etc.

MÉCANIQUE PHYSIQUE. — *Sur deux lois limites concernant la vitesse de rebondissement et l'énergie absorbée, dans le cas du choc d'un corps dur sur un métal mou.* Note de M. **Léon Rebuffé**, présentée par M. Henri Villat.

J'ai exposé (¹) une méthode permettant la détermination simultanée de la résistance électrique et de la durée du contact, au moment du choc entre deux corps métalliques.

(¹) *Comptes rendus*, 203, 1936, p. 1230.

Dans l'intention de rassembler le plus possible d'éléments expérimentaux pour l'établissement d'une théorie physique du choc sur les corps mous, j'ai cherché à déterminer la loi de variation du coefficient de rebondissement (rapport $\varepsilon = V_2/V_1$, de la vitesse de rebondissement à celle d'arrivée) en fonction de la vitesse V_1 pour chacun des mobiles de choc. Je rappelle que ces mobiles (sphères ou masses allongées à bouts sphériques) sont en acier très dur et que leurs caractéristiques (masse m et rayon de courbure r) sont très diverses.

Les vitesses d'arrivée ont varié de 0,25 à 6 mètres par seconde; les vitesses de rebondissement ont été déterminées en photographiant l'image d'une source lumineuse dans le mobile lui-même quand il est sphérique, ou dans une petite sphère qui lui est liée (cas des mobiles non sphériques).

Pour interpréter avec le maximum de précision les résultats obtenus comme moyennes d'un grand nombre d'essais, j'ai cherché quelles variables étaient susceptibles de traduire le phénomène étudié par des relations linéaires. Les graphiques construits avec les coordonnées $\alpha = V_2/(V_1 + V_2)$ [soit $\alpha = \varepsilon/(1 + \varepsilon)$] et $1/V_2$ ont été trouvés les plus intéressants à ce point de vue : les tracés relatifs aux mobiles pour lesquels la quantité m/r est assez grande, se confondent sensiblement avec des droites dans toute l'échelle des vitesses utilisées. Je suis arrivé ainsi aux conclusions suivantes :

1° Le rapport ε de la vitesse de rebondissement V_2 à la vitesse d'arrivée V_1 d'un corps dur sur un métal mou, tend vers une limite ε_0, quand V_1 croît indéfiniment.

2° Cette limite ε_0 est indépendante de la masse et du rayon de courbure du mobile de choc. Elle est donc une caractéristique mécanique du métal mou qui subit le choc.

Voici quelques valeurs de ε_0 :

Plomb du commerce n° 1 (métal poli)	$\varepsilon_0 = 0,282$
Plomb du commerce n° 2 (métal poli et recuit)	0,139
Étain pur (métal poli et recuit)	0,228
Cuivre électrolytique (métal poli et recuit)	0,270

II. Le coefficient de rebondissement ε est certainement lié à l'énergie dépensée par le mobile de choc pour produire la déformation permanente dans le métal mou. L'hypothèse la plus simple ([2]) est que si la déformation élastique est faible par rapport à la déformation plastique, le travail de

([2]) J.-P. Andrews, *Phil. Mag.*, 9, 1930, p. 593.

déformation est presque uniquement un travail de refoulement de la matière, sous une pression normale p_0 opposée au mobile de choc.

Il y avait donc lieu de considérer la quantité $A = [m(v_1^2 - v_2^2)]/2u$, rapport de l'énergie perdue par le mobile pendant le choc, au volume u de l'empreinte permanente. J'ai calculé le volume u en admettant que la déformation élastique du mobile peut être négligée et que l'empreinte a la forme d'une calotte sphérique.

En étudiant la variation de $1/A$ en fonction de ε j'ai trouvé que, lorsque v croît, A tend vers une limite A_0 indépendante du rayon de courbure et de la masse du mobile de choc, c'est-à-dire vers une quantité *caractéristique du métal éprouvé*.

A_0, qui a les dimensions d'une pression, est *a priori* pour les métaux mous, certainement très voisin de la pression p_0 dont il a été question plus haut. En réalité, ces deux quantités ne pourraient être identiques que si la déformation élastique était absolument négligeable par rapport à la déformation plastique.

Cette constante caractéristique A_0 a la valeur suivante pour les métaux étudiés :

Plomb du commerce n° 1	$A_0 = 15$	kg/mm²
Plomb du commerce n° 2	8,75	»
Étain pur	35,1	»
Cuivre électrolytique	31	»

Divers auteurs (Edwards et Austin, *Iron and Steel Institute*, mai 1923) ont étudié le rapport désigné ici par A, mais sans conclure qu'il tend vers une limite pour les métaux mous.

MOTEURS A EXPLOSION. — *L'inflammation spontanée des hydrocarbures mélangés à l'oxygène et ses rapports avec l'indice d'octane.* Note [1] de M. **Marcel Peschard**, présentée par M. Aimé Cotton.

Le processus d'inflammation spontanée des mélanges d'oxygène et d'un carbure peut être interprété par des réactions en chaînes ou par un mécanisme d'échauffement. Dans les deux cas, la théorie indique pour la pression minima d'inflammation en fonction de la température Kelvin T la relation

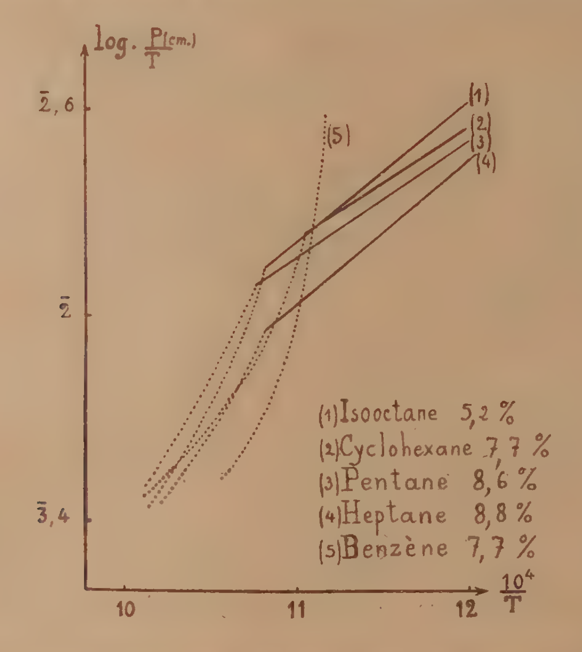
$$\log \frac{p}{T} = \frac{A}{T} + B; \qquad (1)$$

[1] Séance du 31 janvier 1938.

A est une constante proportionnelle à l'énergie d'activation;

B dépend de la constante de vitesse, des dimensions du vase, de la concentration du mélange, de la chaleur de réaction.

Sagulin [2] a vérifié cette loi pour divers carbures et particulièrement pour le pentane-*n*. Il a trouvé pour chacun une droite qui se déplace en restant parallèle à elle-même quand on modifie la composition du mélange.



J'ai étudié la question pour les carbures pentane-*n*, heptane-*n*, isooctane (2.2.4-triméthylpentane), benzène, cyclohexane.

Le mélange gazeux, conservé dans un réservoir, est introduit brusquement dans un tube épais d'acier inoxydable où la température est repérée par un couple thermoélectrique et la pression par un manographe optique. J'ai ainsi exploré un domaine de températures allant de 800° K. à 1000° K. La figure ci-dessus traduit les résultats pour les mélanges dont la composition est indiquée (pression partielle du carbure exprimée en pour 100 de la pression totale).

A. Les carbures, sauf le benzène, ont présenté la droite annoncée théoriquement avec une inclinaison indépendante de la composition du

(2) *Z. phys. Chem.*, B, 1, 1928, p. 275.

mélange. Une détonation véritable, sèche et parfois violente, suivie d'échauffement et laissant derrière elle un accroissement permanent de pression se produit pour toute pression située au-dessus de la droite représentative du carbure.

Diverses circonstances expérimentales conduisent à penser qu'elle est produite par des composés instables se formant dès le début de la combustion lente et capables de détoner s'ils atteignent une concentration suffisante. Leur rôle serait donc analogue à celui qui a déjà été attribué aux peroxydes.

Mais, vers 920° K. (température légèrement variable d'un corps à l'autre et selon la teneur du mélange), ce phénomène fait place à une sorte d'inflammation très calme et parfois même difficile à percevoir. Ce nouveau phénomène n'obéit pas à la loi linéaire (2).

La détonation, lorsqu'elle se produit, vient avec un retard toujours inférieur à 4 secondes. *Au contraire*, l'inflammation tranquille est souvent observée avec un retard de plusieurs centaines de secondes.

Cette différence, jointe à l'absence de tout caractère violent et à la disparition de la loi linéaire, semble suffisante pour distinguer deux phénomènes différents.

B. L'inclinaison des droites n'a pas permis d'entrevoir une relation simple entre l'énergie d'activation et l'indice d'octane : en effet, l'heptane-*n* et l'isooctane, qui sont *très différents au point de vue détonant*, sont représentés par des droites *de même inclinaison*.

Mais : *a*. il est visible que les ordonnées des droites classent les carbures dans le même ordre *qualitatif* que les indices d'octane; *b*. si l'on considère le pentane ou le cyclohexane, les droites qui les représentent partagent l'intervalle heptane-isooctane en rapports dépendant de T; autrement dit, l'indice d'octane n'est généralement défini que pour une température donnée et varie d'une température à l'autre.

C. Le benzène n'a pu être observé sous une pression suffisante pour obtenir une détonation : c'est toujours le phénomène tranquille qui s'est produit.

D. On pense à étendre les recherches à des séries homologues de carbures et à les orienter vers des températures plus basses (et, par conséquent, des pressions plus élevées), afin de se rapprocher des conditions régnant dans les moteurs. En reprenant l'étude pour des mélanges de même composition, peut-être pourra-t-on obtenir dans cette voie la représentation d'une essence par une courbe (douée de signification physique), qui se substituerait avantageusement à la notion arbitraire d'indice d'octane.

MÉCANIQUE NUCLÉAIRE. — *Sur la théorie des gerbes de protons et de neutrons.* Note de M. **Louis Goldstein**, présentée par M. Louis de Broglie.

L'émission d'un corpuscule lourd unique, proton ou neutron, par un noyau activé, peut être décrite à l'aide du modèle de gaz intranucléaire [1] comme une sorte d'effet Richardson. Nous voudrions montrer dans ce qui suit que ce même modèle de noyau permet de décrire les phénomènes de disparition des niveaux d'énergie nucléaires de haute activation, auxquels cas plusieurs corpuscules lourds peuvent quitter le noyau initial excité.

Dans ce cas de noyaux hautement activés et suivant l'énergie du niveau nucléaire considéré, plusieurs phénomènes d'émission de corpuscules lourds concourent à la destruction de ce niveau. L'un de ces phénomènes est celui de l'émission d'un corpuscule unique. Comme le corpuscule émis n'emporte, en général, qu'une quantité d'énergie d'excitation relativement faible, le noyau formé après le départ d'une première particule peut rester encore hautement activé et peut émettre à son tour une nouvelle particule, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il se forme un noyau relativement peu excité qui pourra se désactiver avec des probabilités comparables soit par émission d'un corpuscule lourd, proton, neutron ou particule α, soit par émission d'un ou plusieurs photons. Le noyau formé finalement pourra être stable ou radioactif β. La vie moyenne des niveaux d'énergie nucléaire de haute activation étant très courte, on conçoit qu'un noyau initial suffisamment activé puisse donner naissance à une véritable gerbe de corpuscules lourds comprenant éventuellement quelques photons. Mais, en dehors de ces gerbes dont les éléments sont émis successivement dans des intervalles de temps ne dépassant guère, en moyenne, 10^{-15} à 10^{-16} seconde, on doit s'attendre, en vertu même de la forte interaction des particules nucléaires, à ce qu'un niveau d'énergie de haute activation disparaisse aussi par émission simultanée de deux, trois ou plusieurs particules lourdes.

Dans l'état actuel de la théorie nucléaire, on est amené à décrire l'émission d'un corpuscule unique à l'aide de deux méthodes superposées qui se rapportent, respectivement, à l'aspect statistique imposé par le modèle nucléaire adopté et à l'aspect plus élémentaire de ce processus. On est

(1) *Comptes rendus*, **206**, 1938, p. 42.

conduit tout naturellement à appliquer ce même procédé à la description de l'émission simultanée de plusieurs particules. Le côté statistique de cette description se rapporte à des corpuscules indépendants, mais son côté élémentaire traduit le couplage des particules à l'intérieur du noyau et assure ainsi le caractère simultané du phénomène d'émission. Le mécanisme élémentaire de l'émission se trouve décrit approximativement par une probabilité de conversion simultanée qui, pour un noyau de nombre de masse A et d'énergie d'excitation u, pourra être désignée par ${}_{\mathrm{A}}\gamma_2(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ en cas d'émission de deux particules, l'une avec l'énergie cinétique ε_1 et l'autre avec ε_2. Cette probabilité correspond à la conversion simultanée des particules couplées de leur état intranucléaire lié à l'état de particules libres. Comme le modèle nucléaire statistique impose la densité des particules $\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2$ avec l'énergie cinétique dépassant respectivement de ε_1 et ε_2, l'énergie potentielle des forces de cohésion nucléaire, supposée constante dans ce modèle, sous la forme $\rho(\varepsilon_1)\rho(\varepsilon_2)\,\mathrm{V}\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2$ en vertu de l'indépendance des particules, V étant le volume nucléaire, il résulte d'une étude détaillée que le seul courant de particules, quittant simultanément le noyau normalement à sa surface, compatible avec un courant de particules couplées en mécanique des quanta, s'écrit approximativement

$$(1) \qquad {}_{\mathrm{A}}J_2(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = {}_{\mathrm{A}}\gamma_2(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2)\,\mathrm{V}\rho(\varepsilon_1)\rho(\varepsilon_2)\,[v_n(\varepsilon_1) + v_n(\varepsilon_2)]\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2,$$

v_n étant la vitesse normale. Ce courant établi, la théorie de l'émission simultanée des corpuscules lourds par un noyau hautement activé se développe sans difficultés. Nous ne pouvons donner ici qu'une des grandeurs caractéristiques du phénomène qu'elle fournit; c'est la largeur ${}_{\mathrm{A}}\Gamma_p(u)$ d'un niveau nucléaire d'énergie u due à l'amortissement par émission simultanée de p particules lourdes;

$$(2) \qquad {}_{\mathrm{A}}\Gamma_p(u) = \frac{h\,{}_{\mathrm{A}}\mathrm{P}_p(u)}{2\pi} = {}_{\mathrm{A}}\gamma_p(u)\,\frac{3^{\frac{3p+1}{3}}}{2^{3p-1}}\,\pi^{\frac{3p-5}{6}}(\mathrm{A}-p)^{\frac{3p-1}{3}}\,p\,\frac{(k\mathrm{T}_p)^{\frac{3p+1}{2}}}{\alpha_0^{\frac{3p-1}{2}}}\exp -\frac{p\overline{\mathrm{L}}}{k\mathrm{T}_p}$$

où h est la constante de Planck, ${}_{\mathrm{A}}\mathrm{P}(u)$ est la probabilité totale par unité de temps de l'émission simultanée de p particules, α_0 est l'énergie libre, au zéro absolu, du gaz de protons ou neutrons intranucléaires, $\overline{\mathrm{L}}$ est l'énergie de liaison L par particule augmentée d'un terme correctif dépendant de la température T_p définie par la relation limite approchée, k étant la constante de Boltzmann,

$$(3) \qquad k\mathrm{T}_p = \left[\frac{4\alpha_0(u - p\mathrm{L})}{(\mathrm{A}-p)\pi^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dans l'hypothèse où l'on admet que la valeur moyenne $\overline{\sqrt{\gamma_p(u)}}$ de la probabilité de conversion simultanée ne varie pas beaucoup avec u et p, la largeur statistique $\sqrt{\Gamma_p(u)}/\overline{\sqrt{\gamma_p(u)}}$ conduit à un groupement remarquable des niveaux d'énergie nucléaires. Des niveaux d'un même groupe, tout en différant en énergie, auraient des propriétés de disparition semblables, ces propriétés variant d'un groupe à l'autre.

ASTRONOMIE STELLAIRE. — *Sur l'application de la relation masse-luminosité au calcul des parallaxes des étoiles doubles à éclipses.* Note [1] de M. **Georges Durand**, présentée par M. Ernest Esclangon.

Les étoiles doubles à éclipses avec 2 spectres connus, pour lesquelles on possède les éléments photométriques et spectroscopiques, ont fourni la matière de nombreux travaux sur la relation masse-luminosité, mais limités à une *vérification* de la relation [2]. Or celle-ci, envisagée du point de vue numérique, paraît suffisamment bien établie pour être utilisée à l'obtention de résultats nouveaux [3]. Je me propose donc de montrer comment son application à cette classe d'étoiles détermine un élément inconnu, la *parallaxe*, tout en permettant une discussion des valeurs obtenues.

Méthode. — Soit la relation d'Eddington, mise sous la forme réduite $G = \varphi(\mathfrak{M})$, $\mathfrak{M}$ étant la masse d'une étoile et G une valeur déduite de sa magnitude absolue visuelle par addition d'un terme U, fonction de sa seule température, donc connu à partir du type spectral [4].

Les données de l'observation sont ici : les masses individuelles $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ des composantes, les intensités lumineuses relatives L_1 et L_2 ($L_1 + L_2 = 1$), la magnitude apparente totale (ou globale) m lors du maximum, enfin les termes U_1 et U_2. La solution du problème se résume dans l'application successive aux deux composantes de la formule qui exprime la magnitude absolue d'une étoile en fonction de sa magnitude apparente; on trouve

---

(1) Séance du 7 février 1938.

(2) Voir, par exemple, J. A. Pearce, *Victoria*, 3, 1926, p. 303; D. B. Mac Laughlin, *Astronomical Journal*, 38, 1927, p. 21; J. H. Pitman, *ibid.*, 39, 1929, p. 57; J. Ellsworth, *Comptes rendus*, 199, 1934, p. 1378.

(3) G. Durand, *Annales de l'Obs. de Toulouse*, 14, 1938, p. 5-50.

(4) Sur la réduction à la forme $G = \varphi(\mathfrak{M})$ et pour les Tables de φ et de U, voir G. Durand, *ibid.*, 11, 1935, p. 210 et 224.

ainsi deux valeurs p_1 et p_2 de la parallaxe, définies respectivement par deux équations dont les termes sont identiques, à l'indice près, la première de ces équations étant

$$(1) \qquad \varphi(\mathfrak{M}_1) - U_1 = m - 2,5 \log L'_1 + 5 + 5 \log p_1.$$

Le calcul numérique exige peu d'effort. Il s'effectue à l'aide des Tables de la fonction φ et du terme U, et il est grandement simplifié par l'emploi d'une autre Table, celle du *module de distance* en fonction de la parallaxe, c'est-à-dire de la quantité $-5-5\log p$; en effet, L_1 et L_2 étant donnés en centièmes, posons, par exemple, $L_1 = L'_1/100$ et entrons avec l'argument L'_1 dans la partie de la Table où p, exprimé en millièmes de seconde, contient deux chiffres significatifs : on y trouve la quantité

$$-5 \log L'_1 + 10 = -5 \log L_1,$$

ce qui est le double de l'expression qui figure dans (1); la même Table fournit aussi en fin de calcul la valeur de p_1.

Précision. — Ayant repris avec un matériel plus récent mon étude sur la précision de la relation masse-luminosité (5), il en résulte que l'erreur relative sur la valeur d'une parallaxe déterminée par la relation est en moyenne de l'ordre de 16 pour 100.

Résultats numériques. — Afin d'appliquer la méthode à toutes les étoiles doubles à éclipses suffisamment bien connues, je me suis servi des orbites du récent Catalogue de Moore (6). Il donne 22 couples pour lesquels j'ai calculé p_1 et p_2, ainsi qu'un rapport ρ susceptible de caractériser la précision du résultat d'après l'accord entre ces deux valeurs : $\rho = \Delta p/p'$ est obtenu en considérant que la valeur adoptée p' pour la parallaxe est la moyenne de p_1 et p_2, l'erreur Δp étant l'écart entre cette moyenne et chacune des valeurs p_1 et p_2.

D'une façon générale, *les valeurs trouvées pour ρ sont satisfaisantes :* il y a 14 couples pour lesquels $\rho < 0,10$, 6 couples avec $\rho > 0,20$ et 3 seulement avec $\rho > 0,30$ (la plus grande valeur de ρ est 0,46). De plus, la moyenne des ρ est 0,13, nombre voisin de celui qui a été trouvé à propos de la précision. On note aussi que les étoiles qui donnent lieu à une forte valeur de ρ sont souvent celles dont les éléments offrent le plus d'incertitude.

D'autre part, si l'on examine la différence *algébrique* $\delta = p_2 - p_1$, on

---

(5) *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 1915.
(6) *Lick Obs. Bull.*, 18, n° 483, 1936, p. 23.

compte 14 couples pour lesquels $\delta > 0$ contre 7 seulement avec $\delta < 0$ ($\delta = 0$ pour un couple). Cette prédominance de valeurs positives suggère la possibilité d'une certaine erreur de caractère systématique sur les données dont on part pour appliquer la relation masse-luminosité, erreur d'ailleurs faible puisque $|\delta|$ est habituellement petit.

Enfin, la comparaison de p_1 et p_2 avec les parallaxes obtenues ailleurs a été faite pour chacun des couples, mais il est malaisé d'en dégager une idée d'ensemble. La plupart des auteurs d'orbites indiquent une parallaxe *calculée*, fréquemment hypothétique, sur laquelle il est difficile de se prononcer, et, les méthodes variant selon les auteurs, ces valeurs ne sont pas homogènes entre elles. Plus intéressante serait la considération des parallaxes *mesurées*, mais celles-ci sont trop peu nombreuses et trop imprécises; 10 étoiles seulement sur 22 ont une parallaxe dans le *General Catalogue of stellar parallaxes* de Schlesinger (Yale, 1935); pour 2 d'entre elles, possédant à la fois valeurs trigonométrique et spectroscopique, l'accord est tout à fait médiocre entre les deux déterminations et, sur 6 parallaxes trigonométriques, il y en a 3 qui sont inférieures à leur erreur probable indiquée au Catalogue.

Cette absence de valeurs satisfaisantes pour la parallaxe des étoiles considérées souligne l'intérêt qui s'attache à la recherche de ces parallaxes selon de nouveaux moyens d'investigation; c'est ce qui a été tenté ici avec la relation masse-luminosité.

ASTROPHYSIQUE. — *Sur la présence du premier groupe positif de l'azote dans le spectre de la comète Finsler* (1937, *f*). Note (1) de M. **Junior Gauzit**, présentée par M. Charles Fabry.

J'ai signalé (2) la présence du premier groupe positif de l'azote dans le spectre de la comète Finsler.

Ce système de bandes n'a jamais été reconnu dans l'émission des comètes, quoique la présence du deuxième système positif paraisse vraisemblable (3) (4). L'existence de molécules neutres d'azote dans les têtes

(1) Séance du 31 janvier 1938.
(2) *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 169.
(3) Johnson, *Monthly Notices*, 87, 1927, p. 625.
(4) Dufay, *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 744.

des comètes n'a été jusqu'ici démontrée avec certitude que par la découverte des bandes de Vegard-Kaplan [4].

On peut remarquer que divers auteurs [5] ont indiqué, sans rien préjuger quant à l'attribution, des radiations voisines des têtes de bandes (6-3), (13-11), (6-2), (7-3), (13-9), (6-0), (11-5), (12-6), (13-7) du premier groupe positif. Mais la plupart de ces coïncidences, que je rassemble ici, sont éparses et elles ne permettent pas de caractériser le système. Sa mise en évidence dans un spectre complexe est particulièrement difficile, ainsi que l'a montré Cabannes [6] à propos du ciel nocturne, à cause du nombre élevé des bandes et de la répartition très variable des intensités suivant le mode d'excitation. Ce sont précisément les nombreuses concordances, dans les régions rouge et jaune, entre les spectres de la comète Finsler et ceux du ciel nocturne et de l'aurore qui m'ont étonné et poussé à rechercher l'existence du premier groupe positif de l'azote.

Malgré quelques superpositions, j'ai reconnu, dans les spectres de la comète Finsler, la présence de nombreuses têtes de bandes de ce système, notamment, comme le montre la figure ci-après, pour les 7 ou 8 premiers termes de la séquence $v' - v'' = 3$, pour les 9 ou 10 premiers termes de la séquence $v' - v'' = 4$; les termes (10-8), (11-9), (12-10), (13-11), (14-12), (15-13), (16-14) de la séquence $v' - v'' = 2$ sont probablement présents aussi, comme dans l'émission du ciel nocturne; enfin les premiers termes des séquences $v' - v'' = 5$ et 6 sont recouverts par les séquences $v' - v'' = -1$ et 0 du spectre de Swan.

On sait que l'on interprète actuellement la luminescence des comètes par l'hypothèse de spectres de résonance ou de fluorescence excités par la lumière solaire [7]. La présence du premier groupe positif de l'azote (transition $B^3\Pi \rightarrow A^3\Sigma$), qui n'admet pas pour état final le niveau fondamental de la molécule, semble *a priori* contraire à ces idées. Or la contradiction n'est qu'apparente. On peut supposer que les molécules neutres d'azote sont amenées au niveau initial $B^3\Pi$ (7,32 volts) à partir de l'état fondamental, par absorption du rayonnement solaire ultraviolet. Mais un autre mode d'excitation paraît plus vraisemblable : le niveau final $A^3\Sigma$ est un

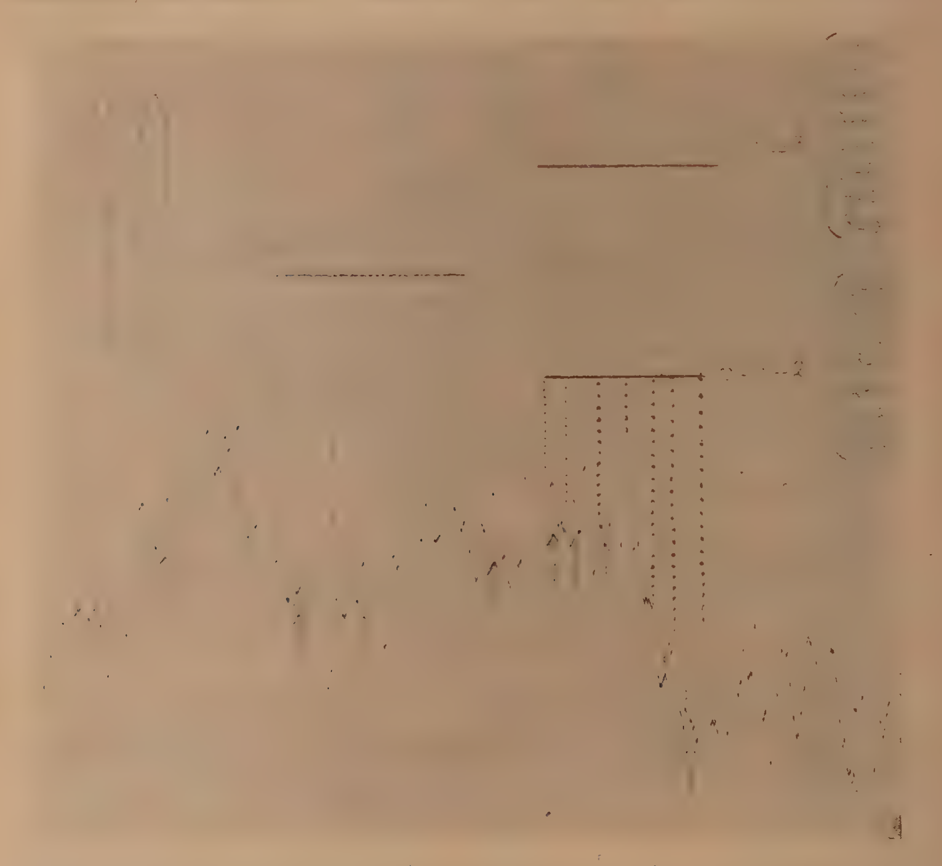
---

(5) WRIGHT, *Lick. Observatory Bulletins*, 7, 1912, p. 8; BALDET, *Annales de l'Observatoire d'Astronomie physique de Paris*, 7, 1926, p. 1; MINKOWSKI, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 49, 1937, p. 276.

(6) *Journal de Physique*, 7e série, 5, 1934, p. 601.

(7) ZANSTRA, *Monthly Notices*, 89, 1928, p. 178; WURM et MECKE, *Zeitschrift für Astrophysik*, 8, 1934, p. 97.

état métastable : les molécules portées à ce niveau peuvent y rester pendant un temps assez long, car les chocs sont extrêmement rares, la pression étant très faible, inférieure à 10^{-10} mm. de mercure d'après K. Wurm ([3]); si les



Bandes du premier groupe positif de l'azote dans le spectre de la comète Finsler; enregistrement au microphotomètre de Moll du spectre obtenu le 3 août 1937 (les flèches indiquent quelques bandes du spectre rouge du cyanogène).

molécules retombent spontanément à l'état fondamental, elles émettent les bandes de Vegard-Kaplan, précédemment reconnues dans l'émission des comètes ([4]); mais auparavant une excitation très faible, inférieure à 1 volt, peut les avoir amenées à l'état $B^3\Pi$, niveau supérieur du premier groupe positif.

([3]) *Zeitschrift für Astrophysik*, 8, 1934, p. 281.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Expression des grandeurs physiques en fonction de nouvelles grandeurs appartenant à un sous-espace.* Note de M. **Jean Roubaud-Valette**, présentée par M. Louis de Broglie.

Considérons les nombres l_i, l_{ij} de Grassmann tels que $l_{ij}=l_i l_j$, $l_i l_{kj}=l_j \delta_{ik}$ et $l_{ij} l_{kl}=l_{il}\delta_{jk}$. Formons les grandeurs correspondant aux airs des sous-espaces l_i,

$$(1)\quad \begin{cases} 1 \cong l_{00}+l_{11}+l_{22}+l_{33}, \\ J_1 \cong (l_{32}-l_{23})+(l_{01}-l_{10}), \\ J_2 \cong (l_{13}-l_{31})+(l_{02}-l_{20}), \\ J_3 \cong (l_{21}-l_{12})+(l_{03}-l_{30}) \end{cases}$$

et

$$(2)\quad \begin{cases} 1 \cong l_{00}+l_{11}+l_{22}+l_{33}, \\ J'_1 \cong (l_{32}-l_{23})-(l_{01}-l_{10}), \\ J'_2 \cong (l_{13}-l_{31})-(l_{02}-l_{20}), \\ J'_3 \cong (l_{21}-l_{12})-(l_{03}-l_{30}). \end{cases}$$

Les J et J′ commutent et $J_i^2=J_i'^2=-1$.

Le nombre fondamental $N\equiv S\,1+\Gamma_1(IX+JY+KZ)+\Gamma_2 T+\Gamma u$ peut être considéré comme une troncature de $[S+\Gamma_1(iL)+\Gamma_2 T+\Gamma u]$ $[1+I\alpha+J\beta+K\gamma]$ avec $L^2=X^2+Y^2+Z^2$, $\alpha=X/iL$, ..., $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-1$.

Le premier quaternion est *dimensionnel*. En égalant son module à zéro, on a $S^2+L^2+U^2-T^2=0$. C'est la signature de l'espace-temps-masse où $(S=iR)$.

Le deuxième quaternion est *directionnel*. Son module est zéro, il représente la répartition des grandeurs suivant les directions de l'espace-temps-masse.

Faisons correspondre

$$1 \cong l_{00}+l_{11}+l_{22}+l_{33}; \qquad I=J_1, \qquad J=J_2, \qquad K=J_3,$$
$$\Gamma_1 i=J'_1, \qquad \Gamma_2 i=J'_2, \qquad -\Gamma=J'_3.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} N\equiv\{&S(l_{00}+l_{11}+l_{22}+l_{33})+L[(l_{31}-l_{23})-(l_{01}-l_{10})] \\ &+Ti[-(l_{13}-l_{31})+(l_{02}-l_{20})+u[-(l_{21}-l_{12})+(l_{03}-l_{30})] \\ &\times\{1(l_{00}+l_{11}+l_{22}+l_{33})+\alpha[(l_{31}-l_{23})+(l_{01}-l_{10})] \\ &+\beta[(l_{13}-l_{31})+(l_{02}-l_{20})]+\gamma[(l_{21}-l_{12})+(l_{03}-l_{30})]\}. \end{aligned}$$

En exprimant l'hamiltonien

$$H\equiv\mu_0 c+\Gamma_1(IP_1+JP_2+KP_3)+\Gamma_2 P_4+\Gamma P_5$$

exprimé en fonction des l_{ij} et en choisissant les deux nombres

$$\psi = l_{00}\psi_0 + l_{10}\psi_1 + l_{20}\psi_2 + l_{30}\psi_3 \quad \text{et} \quad \psi^* = l_{00}\psi_0^* + l_{01}\psi_1^* + l_{02}\psi_2^* + l_{03}\psi_3^*,$$

on a $H\psi = 0$, qui donne les équations de Dirac et $\psi^* H = 0$, qui donne les équations conjuguées.

En écrivant

$$\psi = (l_0\psi_0 + l_1\psi_1 + l_2\psi_2 + l_3\psi_3)(l_0 a - l_1 b + l_2 c + l_3 d),$$

a, b, c, d constantes arbitraires. On retrouve les mêmes équations de Dirac.

Les équations de Dirac expriment donc une transformation affine dans l'espace l_i. On obtient les équations de propagation du fluide de probabilité directement par $\psi^* 1 \psi$, $\psi^* \Gamma_1 I \psi$, ... et, en général, à toute grandeur a on fait correspondre un opérateur A, exprimé en l_{ij} et on a la probabilité de mesure correspondante par $\psi^* A \psi$.

En écrivant le nombre fondamental $iN = \varphi^*\varphi$ (φ et φ^* vecteurs de li) on obtient, avec la condition

$$\frac{\varphi_0^*}{\varphi_1} = \frac{\varphi_1^*}{\varphi_0} = -\frac{\varphi_2^*}{\varphi_3} = -\frac{\varphi_3^*}{\varphi_2}, \quad X = \varphi_0\varphi_1 + \varphi_2\varphi_3; \quad Y = \varphi_0\varphi_2 - \varphi_3\varphi_1; \quad Z = \varphi_0\varphi_3 - \varphi_2\varphi_1;$$

$$T = \varphi_0\varphi_3 + \varphi_2\varphi_1; \quad U = (-i)(\varphi_0\varphi_2 + \varphi_3\varphi_1); \quad R = \varphi_3\varphi_2 - \varphi_0\varphi_1.$$

On peut faire correspondre

$$\varphi^* \text{ à } i[1S + \Gamma_1 iL + \Gamma_2 T + \Gamma u] \quad \text{et} \quad \varphi \text{ à } [1 + I\alpha + J\beta + K\gamma].$$

On a

$$(4)\quad \begin{cases} (R) \cong -l_0\varphi_0^* - l_1\varphi_1^* - l_2\varphi_2^* - l_3\varphi_3^*; \\ (L) \cong i[l_1\varphi_0^* - l_0\varphi_1^* + l_3\varphi_2^* - l_2\varphi_3^*] \\ (T) \cong \quad l_0\varphi_2^* - l_1\varphi_3^* - l_2\varphi_0^* + l_3\varphi_1^*; \\ (U) \cong i[l^0\varphi_3^* + l_1\varphi_2^* - l_2\varphi_1^* - l_3\varphi_0^*] \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} (1) \cong \quad l_0\varphi_0 + l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + l_3\varphi_3; \\ (\alpha) \cong -l_0\varphi_1 + l_1\varphi_0 + l_2\varphi_3 - l_3\varphi_1; \\ (\beta) \cong -l_0\varphi_2 - l_1\varphi_3 + l_2\varphi_0 + l_3\varphi_1; \\ (\gamma) \cong -l_0\varphi_3 + l_1\varphi_2 - l_2\varphi_1 + l_3\varphi_0. \end{cases}$$

On attache ainsi à chaque grandeur une valeur probable.

On vérifie que Probabilité $(X) = -2(iL)(l_{00} + l_{11} + l_{22} + l_{33})(\alpha)$, ...

On peut interpréter aussi les opérateurs de la théorie de Dirac.

Le spin correspond à une constante près aux opérateurs J_1, J_2, J_3, c'est une *rotation* dans l'espace à quatre dimensions autour des plans 01, 23; 02, 31; 03, 12. Pour le champ magnétique, mêmes rotations.

Pour le champ électrique dont les opérateurs sont $-J'_3J_1$, $-J'_3J_2$, $-J'_3J_3$, on a *antirotation* autour des plans 13, 02; 21, 03; 32, 01.

La représentation dimensionnelle et directionnelle permet, en outre, de préciser les *équations aux dimensions* des physiciens : Le travail d'une force pour un déplacement le long de OX a une représentation directionnelle :

$$[l_{01}(-1)+l_{10}(1)+l_{23}(1)+l_{32}(-1)][l_{10}(-1)+l_{32}(+1)+l_{23}(-1)+l_{01}(1)] \equiv l_{00}+l_{11}+l_{22}+l_{33}=1,$$

d'où aucun caractère directionnel. Le travail d'un couple d'axe OZ a pour représensation directionnelle

$$[l_{01}(-1)+l_{10}(1)+l_{23}(1)+l_{32}(-1)][l_{20}(1)+l_{13}(1)+l_{20}(-1)+l_{31}(-1)] \equiv l_{01}(-1)+l_{30}(1)+l_{12}(1)+l_{21}(-1),$$

ce qui exprime la représentation directionnelle d'une rotation autour des plans 03; 12. Ce dernier travail n'est donc pas un scalaire et son équation aux dimensions doit être écrite

$$M\,|L_i|\,|L_j|\,T^{-2} \quad \text{et non} \quad ML^2T^{-2}.$$

MÉTROLOGIE. — *Méthode pour la détermination absolue des longueurs d'onde lumineuses en fonction de l'unité métrique*. Note de M. **Albert Pérard**, présentée par M. Charles Fabry.

Cette méthode, qui est actuellement en cours de montage, met à profit la propriété qu'ont les surfaces optiquement planes d'adhérer les unes contre les autres, en un contact pratiquement parfait. Son principe consiste à déterminer un même étalon à bouts plans et parallèles, d'une longueur de 988^{mm}, en invar, chromé à ses extrémités, d'une part en fonction des longueurs d'onde lumineuses, d'autre part en fonction du Mètre à traits.

La détermination en longueurs d'onde de ce grand étalon se fait, à l'interféromètre de Michelson quelque peu transformé, en utilisant des étalons intermédiaires de longueurs égales à 1/4, 2/4, 3/4 de la sienne. Sur le trajet de l'un des faisceaux lumineux (n° 1) de l'interféromètre est disposé un disque A en invar chromé, spécialement travaillé et poli spéculairement, formant l'un des miroirs interférents. On fait adhérer l'étalon 1/4 (247^{mm}) par une de ses extrémités contre la région centrale de la surface plane d'un deuxième disque B pareil à A ; l'ensemble de l'étalon et du plan B placé sur

le trajet de l'autre faisceau lumineux (n° 2) constitue le deuxième miroir interférent, tandis que le plan A, réglé au parallélisme optique avec le plan B, et par suite avec les faces de l'étalon, est ajusté à distance telle que son image, par rapport à la glace semi-argentée de l'interféromètre, recoupe en deux parties à peu près égales la longueur de l'étalon. A la lumière des raies très fines étudiées préalablement, il est possible d'observer, sous forme d'anneaux à l'infini, les interférences lumineuses, soit dans la région centrale entre le plan A et la face antérieure de l'étalon sous une différence de marche de 247^{mm}, soit dans les régions latérales entre les plans A et B, sous la même différence de marche. La demi-somme des ordres d'interférences des deux différences de marche donne la longueur de l'étalon 1/4 exprimée directement en longueurs d'onde. Dans une deuxième opération on fait adhérer, contre le plan A, l'étalon 2/4 (494^{mm}) par l'une de ses faces, et l'on dispose l'ensemble sur le faisceau n° 1, de façon que les images des deux extrémités de l'étalon 2/4 soient équidistantes des faces correspondantes de l'étalon 1/4, laissé en place avec son plan B sur le faisceau n° 2. On observe encore les anneaux d'interférence soit dans la région centrale entre les faces antérieures des deux étalons, soit dans les régions marginales entre les plans eux-mêmes. La demi-somme des ordres d'interférences, ajoutée au nombre de longueurs d'onde mesurant l'étalon 1/4, donne la valeur de l'étalon 2/4 en longueurs d'onde. Une troisième opération semblable, où l'étalon 3/4 (741^{mm}) remplace l'étalon 1/4 en adhérant contre le plan B sur le trajet du faisceau n° 2, et une quatrième avec le grand étalon de 988^{mm}, contre le plan A dans le faisceau n° 1, donnent l'expression en longueurs d'onde lumineuses de ce dernier étalon.

D'autre part, pour mesurer en fonction du Mètre à traits le grand étalon, on a établi une paire de petits calibres, analogues à des calibres Johansson, de 12^{mm}, en invar, à surfaces terminales chromées; ils présentent sur l'une de leurs faces latérales carrées un puits central atteignant le centre de la pièce, et au fond duquel une mouche porte un tracé composé d'un trait transversal parallèle aux faces terminales et de deux traits longitudinaux. Mis en adhérence contre les extrémités du grand étalon et convenablement réglés, ils le transforment en une longueur à traits [1] qui est pointée alors dans un comparateur à microscopes micrométriques et rapportée à une règle à traits de 1^{m}, également en invar. Cette mesure est

---

[1] Variante de la méthode des étalons auxiliaires tracés (*Comptes rendus*, **154**, 1912, p. 1586).

répétée en faisant adhérer les calibres porte-traits tantôt par l'une, tantôt par l'autre de leurs faces. Si l'on prend la moyenne des valeurs ainsi trouvées, l'on obtient la longueur en mètre du grand étalon, augmentée de la demi-somme des valeurs des deux calibres porte-traits, sans qu'il soit nécessaire de connaître la position du trait transversal sur chacun. Ces petites pièces sont d'ailleurs facilement mesurées en leur centre à l'interféromètre industriel.

Dans la détermination en fonction des ondes lumineuses, l'alliage invar a l'avantage de présenter une dilatabilité faible et voisine de celle des ondes elles-mêmes, évitant l'obligation d'une connaissance très précise de la température réelle des pièces et conservant un phénomène stable. Les comparaisons entre l'étalon composite et la règle de référence doivent être exécutées dans l'air; les faibles dilatabilités y sont donc encore un avantage. Au contraire, les comparaisons de la règle de référence avec les prototypes de platine se feront dans l'eau; car là il est nécessaire d'avoir exactement la température.

Il est à remarquer que les étalons 1/4, 2/4 et 3/4 forment avec les plans respectifs B, A et B des étalons intermédiaires, dont les erreurs systématiques s'éliminent par différence du résultat final. Même le défaut de planéité du disque A est sans influence, puisque c'est ce plan qui sert de point de départ, et c'est contre lui que vient finalement adhérer le plus grand calibre. Des balanciers spéciaux formant contre-poids sont disposés de telle façon que le poids du plan d'invar chromé adhérant à l'une des extrémités de chaque étalon, ou les poids des petites pièces porte-traits adhérant aux deux extrémités du plus grand étalon, ne risquent pas de modifier, d'une opération à une autre, la forme, et par suite la valeur, des différents intermédiaires.

La mise en application de cette méthode devait rencontrer des difficultés assez sérieuses : chromage de l'invar et sa stabilisation, planéité des surfaces chromées, tracé des mouches au fond des puits des étalons auxiliaires, exécution des balanciers équilibreurs. La plupart de ces difficultés ont déjà été surmontées d'une façon qui donne bon espoir dans le succès final des expériences.

PHYSIQUE GÉNÉRALE. — *Répartition en direction de la vapeur d'eau sortant d'un capillaire.* Note [1] de MM. **Paul Renaud** et **Georges Costeanu**, présentée par M. Louis de Broglie.

La connaissance de la distribution en direction de la vapeur d'eau à la sortie d'un tube capillaire est utile pour étudier l'inhibition [2] de l'action de la vapeur d'eau sur le sodium et pour utiliser les tubes capillaires dans la production des rayons moléculaires d'eau [3].

De la vapeur d'eau, sortant d'un capillaire, arrive dans une fiole où l'on fait un bon vide. Le fond est refroidi à l'air liquide. L'eau s'y condense en face du capillaire; au bout d'un temps variable, des colorations de lame mince apparaissent sur le fond de la fiole. En lumière monochromatique, on constate la présence d'anneaux alternés noirs et jaunes dont le nombre croît au cours de l'arrivée de la vapeur d'eau. Ils peuvent devenir nombreux et fournir une topographie précise de la couche de glace formée, ce qui donne la répartition du jet à la sortie du capillaire, à condition que l'eau se condense au premier choc et que le libre parcours des molécules soit grand par rapport aux dimensions de l'appareil.

Nous avons examiné, en première approximation, cette répartition à la sortie de différents capillaires de $0^{mm},5$ de diamètre, la longueur du capillaire et la pression d'eau à l'entrée étant variables.

Pour faire des mesures absolues, il aurait fallu disposer l'extrémité du capillaire au centre d'une demi-sphère à la paroi refroidie par l'air liquide. Nos déterminations ont été seulement comparatives, et ces conditions ne furent réalisées que grossièrement.

Dans le domaine où nous avons travaillé, la pression à l'entrée agit relativement peu sur la répartition en direction, tandis qu'elle agit beaucoup sur l'intensité. Au contraire, la longueur du tube influe notablement sur la répartition. Pour une longueur de 8^{cm}, la répartition de la couche de glace est pratiquement uniforme dans un cône très ouvert. Cette longueur ne peut pas être utilisée pour la formation des rayons moléculaires. En la diminuant progressivement, nous avons trouvé les meilleures conditions d'emploi

---

(1) Séance du 7 février 1938.

(2) Renaud et Costeanu, *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 1258.

(3) Costeanu et Renaud, *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 1511.

vers 3^{cm}. L'épaisseur de la couche de glace passe de 2 à 1 dans un angle d'environ 20° à partir de l'axe du capillaire, ce qui multiplie l'intensité du jet dans l'axe du tube par un coefficient nettement supérieur à 2.

On vérifie que l'eau se condense bien sur une paroi refroidie à l'air liquide, au point où elle arrive. Un tube capillaire de $0^{mm},5$ de diamètre et de 3^{cm} de long débite de la vapeur sur une paroi percée d'un trou. La vapeur qui ne traverse pas ce diaphragme se dépose sur une paroi froide, celle qui le traverse se dépose sur une autre paroi froide en formant une tache fine. Sa couleur change et une quantité croissante d'anneaux apparaissent dans un petit espace, puis il se forme un fond continu qui peut être cent fois moins épais que la tache centrale. Les molécules d'eau qui arrivent sur une paroi refroidie à l'air liquide se déposent donc le plus souvent au point où elles arrivent.

La théorie fait prévoir ([4]), dans les gaz en mouvement, des ondes dues au battement des ondes moléculaires de Louis de Broglie. Leur longueur d'onde serait du même ordre que celle de la lumière infrarouge. Si elles correspondent à une réalité expérimentale, on la trouvera dans les courants gazeux où la distance moyenne des molécules n'est pas trop grande par rapport à leur longueur d'onde. L'expérience n'indique aucun phénomène de ce genre tant que le vide est bon à la sortie du capillaire. Comme la paroi froide forme une excellente pompe, il faut réaliser un grand débit dans le capillaire pour avoir de la pression à la sortie. Mais alors les phénomènes se compliquent. D'une part, les 700 calories apportées par chaque gramme d'eau réchauffent la paroi froide, et il n'est pas sûr que l'eau se condense où elle arrive ; d'autre part, le libre parcours diminue, il se forme des tourbillons. Quelquefois, il apparaît des anneaux de glace nombreux, mais peu reproductibles ; des taches de quelques millimètres constituées, semble-t-il, par des anneaux matériels se forment si l'on refroidit la paroi pendant que la vapeur passe. En résumé, s'il correspond des ondes expérimentales aux ondes théoriques de battement, elles ne se manifestent pas quand le vide est bon à la sortie du capillaire, ce qui rend leur recherche très délicate.

Conclusion. — On peut augmenter l'intensité des rayons moléculaires d'eau au moyen d'un capillaire bien choisi, comme on peut, dans certaines conditions, les détecter au moyen du sodium ([5]). De plus, un jet de vapeur

---

([4]) *Journal de Chimie physique*, **34**, 1937, p. 141.
([5]) *Comptes rendus*, **206**, 1938, p. 252.

sortant d'un capillaire, dans un bon vide, rencontre en majeure partie la paroi opposée, les causes de l'inhibition de l'eau sur le sodium sont donc d'ordre chimique puisque ces deux corps entrent en contact.

ACOUSTIQUE. — *Spectres de résonance acoustique des liquides.* Note de MM. **Constantin Salceanu** et **Corneliu Istraty**, présentée par M. Aimé Cotton.

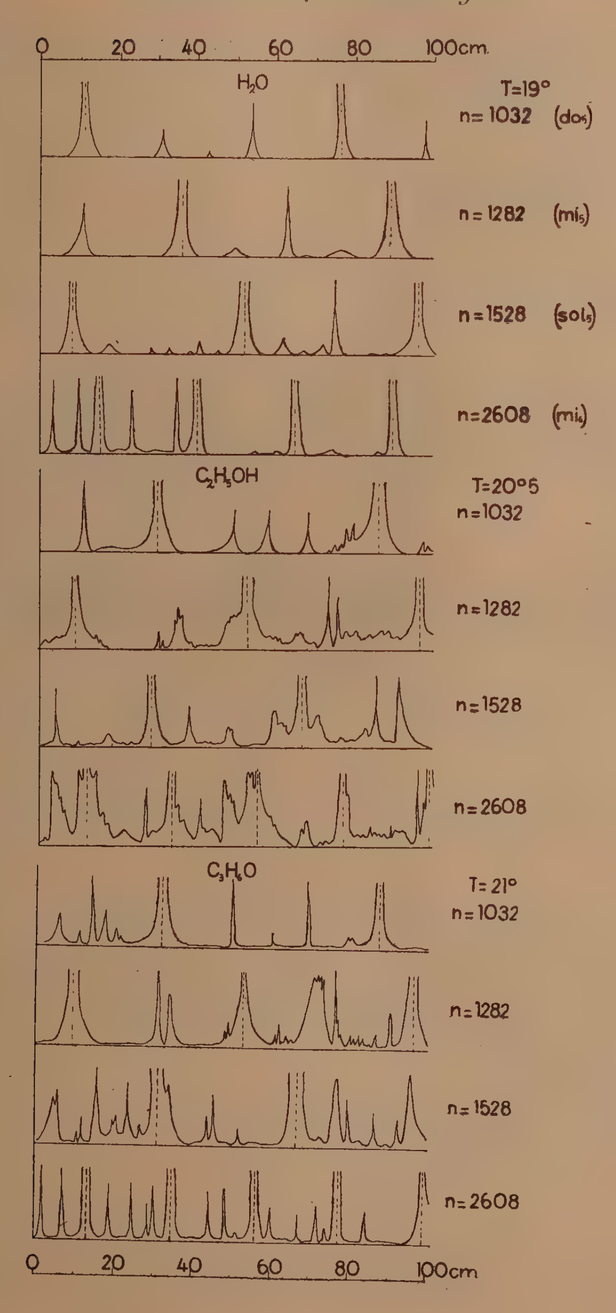
Dans une Note antérieure nous avons décrit un dispositif des positions d'enregistrement de résonance des liquides, basé sur la mesure de l'intensité sonore par déviations galvanométriques. Le réglage de notre dispositif était fait de façon que les déviations du galvanomètre ne sortent pas de l'échelle de lecture en cas de résonance.

Comme Bungetzianu l'a déjà observé et comme nous l'avons confirmé lors de nos mesures, entre les positions principales de résonance d'un liquide s'intercalent toujours une série de résonances secondaires, d'intensité beaucoup plus faible. Nous avons cherché, par un arrangement convenable des tensions anodiques et des potentiels de grille de notre montage, à sensibiliser notre dispositif de manière à mettre en évidence ces résonances secondaires.

Le graphique ci-contre montre les résonances secondaires dans le cas de 3 liquides : eau, alcool éthylique et acétone, en utilisant pour chaque liquide 4 fréquences sonores différentes. Les résonances principales sont représentées par des courbes interrompues vers le haut, leurs maxima dépassant l'échelle de lecture. Les lignes en pointillé indiquent la position approximative des maxima de résonance. Les courbes sont parfaitement reproductibles, de sorte que les influences parasites n'interviennent pas.

Dans le cas de l'alcool éthylique et de l'acétone, qui ont des colonnes de résonance sensiblement égales, les différences entre les spectres correspondant à une même note musicale montrent que, dans le processus de production des résonances secondaires, la nature du liquide doit jouer un rôle important.

Les mouvements vibratoires des molécules d'un corps en état de résonance sont caractérisés par des régions stationnaires. Conformément à la théorie de l'élasticité, un corps peut prendre, à la suite d'une déformation initiale, un état vibratoire où toutes les molécules ont des vibrations simples de même période que celles de la source excitatrice.


0 20 40 60 80 100cm
H₂O
T=19°
n=1032 (do₅)
n=1282 (mi₅)
n=1528 (sol₅)
n=2608 (mi₆)
C₂H₅OH
T=20°5
n=1032
n=1282
n=1528
n=2608
C₃H₆O
T=21°
n=1032
n=1282
n=1528
n=2608
0 20 40 60 80 100cm

La faculté de se mettre en résonance ne varie pas d'une manière continue pour diverses fréquences musicales, de sorte que l'on peut dire que les vibrations propres appartenant à un corps de dimensions finies forment un *spectre discontinu* (¹).

Dans le cas de nos expériences, qui correspondent à un liquide dont on peut varier les dimensions, les courbes que nous avons appelées *spectres de résonance acoustique* représentent les résonances dont le liquide est capable, lorsqu'il est excité par une même source sonore et lorsque son épaisseur seule varie. Nous n'avons pas étudié l'influence des dimensions et de la nature du tube à résonance sur les résonances secondaires.

Les résonances de colonnes de liquide sont représentées par des courbes aiguës, contrairement aux courbes de résonance dues aux colonnes d'air du tube, qui sont beaucoup plus aplaties et se produisent quand les conditions d'expérience sont défectueuses.

ACOUSTIQUE. — *Nouvelle méthode de mesure de la vitesse du son dans les liquides par interférences capillaires ultrasonores.* Note de M. **Jean-Paul Cance**, présentée par M. Langevin.

Je me suis proposé d'étudier les interférences de deux ondes élastiques planes se propageant dans un liquide vers sa surface libre. Une cuve contenant le liquide étudié porte à sa base deux quartz piézoélectriques formant un dièdre obtus, de plan bissecteur vertical, couplés en parallèle à un oscillateur de haute fréquence et capables d'émettre des ultrasons de même période.

Dans ces conditions, on observe à la surface du liquide, dans la partie commune aux deux faisceaux, des cannelures stationnaires (ou rides capillaires), rectilignes, équidistantes, parallèles au plan bissecteur des quartz.

Une lampe à filament rectiligne parallèle aux cannelures et un microscope à long foyer, solidaires du chariot d'un comparateur, permettent les mesures d'interfranges.

Sur la surface liquide, l'amplitude résultante est telle que deux points consécutifs d'amplitude maxima sont distants de

$$\frac{\lambda}{\cos\alpha},$$

(¹) Voir Bungetzianu, *Résonance des liquides*, 1914, p. 96.

où α désigne l'angle commum des quartz avec leur plan bissecteur, et λ la longueur d'onde ultrasonore dans le liquide.

Or le faîte d'une cannelure correspond à un maximum de la pression de radiation résultante, proportionnelle *au carré* de l'amplitude. Deux maxima consécutifs du carré de l'amplitude sont distants de

$$d = \frac{\lambda}{2\cos\alpha} = \frac{V}{2N\cos\alpha}.$$

La vitesse de propagation est donc liée à la valeur de l'interfrange par la relation

$$V = 2N\,d\cos\alpha,$$

La fréquence N étant mesurée à l'ondemètre.

Les expériences ont été réalisées avec des fréquences de l'ordre de 1600 KC et un angle α voisin de 60°.

Pour le toluène, les premiers résultats obtenus à la température ambiante ont fourni pour V des valeurs concordantes voisines de 1325 m/s, en accord avec des résultats antérieurs (Parthasarathy, *Proc. Ind. Acad. of Sc.*, 2, 1937, p. 503, trouve pour le toluène à 23°C, 1320 m/s).

Nous nous proposons d'appliquer cette méthode à la mesure de la vitesse de propagation dans le mercure ou d'autres liquides dont l'opacité rend impossible l'étude par la méthode optique de MM. Lucas et Biquard [1].

CHALEUR. — *Le partage du flux de chaleur dans les méthodes de double-mur.* Note de M. **Pierre Vernotte**, présentée par M. Aimé Cotton.

Nous avons insisté, et particulièrement dans notre Note [1], sur la nécessité de contrôler des flux et non des températures, dans les expériences sur la propagation de la chaleur. On est ainsi conduit, dans les problèmes les plus simples, à dissiper de la chaleur dans un *chauffoir* très plat, inséré entre deux murs, identiques ou non, dans lesquels on étudiera la propagation : dispositif que nous avions nommé *double-mur*, et sur lequel avaient porté nos premières expériences sur l'écoulement de la chaleur en régime permanent dans les métaux, en 1924, et dont nous avons repris l'essentiel, lors des expériences en régime variable rappelées ci-dessus.

---

[1] *Comptes rendus*, **194**, 1932, p. 2132; **195**, 1932, p. 121.

[1] *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 563.

Le contact étant supposé parfait entre chacune des faces du chauffoir sans épaisseur et le mur correspondant, il est évident que, si ces murs sont de même substance, par raison de symétrie, le flux se partagera, *à l'instant initial*, par parties égales, entre les deux murs, quelles que soient leurs épaisseurs respectives et les conditions aux limites établies sur leurs deuxièmes faces : car, lors des premiers instants, le signal ne se fait sentir (*loc. cit.*) avec une intensité finie, qu'au voisinage du chauffoir, de sorte que les deuxièmes faces sont alors pratiquement à l'infini.

Cette propriété d'*égal partage initial* est, en fait, tout à fait *générale*; elle est vraie de tous les murs, et s'applique même, quelque différentes que puissent être leurs caractéristiques physiques. Elle découle immédiatement des propriétés des solutions de l'équation de la chaleur.

Supposons d'abord que le système des murs ne soit pas thermiquement isolé, de telle sorte qu'un état de régime permanent puisse exister. Le flux total Φ sera partagé, à ce moment, en deux flux partiels, Φ_1 et $-\Phi_2$, dirigés en sens opposés.

Cela étant, on sait que, pour former, par la méthode de Fourier, la solution du problème de l'échauffement sous l'effet de sources données, il faut retrancher, de la solution de régime permanent correspondante, la solution relative au refroidissement du système — supposé amené initialement aux températures du régime permanent — lorsque disparaissent ces sources.

Pour ne pas alourdir les calculs en passant par les températures elles-mêmes, remarquons que ce qui vient d'être dit des températures s'applique aux flux, proportionnels à leurs gradients.

Considérons donc les flux lors du refroidissement. Il faut développer en série de Fourier l'état initial, qui est ici l'état de régime, défini par la valeur $-\Phi_2$ du flux, à gauche du chauffoir, et la valeur Φ_1, à droite. D'après une propriété connue, la valeur de cette série, au point de discontinuité, sera la moyenne arithmétique des deux valeurs, en ce point, de la fonction discontinue. A l'emplacement du chauffoir, la solution relative au refroidissement vaut donc, à l'instant initial, $(\Phi_1 - \Phi_2) : 2$. A l'instant où s'allume le chauffoir, le flux vaut, par suite,

$$\text{à droite : } \Phi_1 - (\Phi_1 - \Phi_2) : 2 = (\Phi_1 + \Phi_2) : 2 = \Phi : 2; \qquad \text{et à gauche : } -\Phi : 2.$$

Si, comme nous l'avions admis (*loc. cit.*), les murs étaient parfaitement isolés, la température augmenterait indéfiniment; mais les flux restant finis, les considérations ci-dessus subsisteraient.

Supposons maintenant *imparfait* le contact chauffoir-murs. Soient R_1 et R_2 les résistances thermiques sur les deux faces. La température initiale des deux murs étant partout zéro, la température W que prend instantanément le chauffoir (on néglige sa capacité calorifique) dès l'allumage, est $W = R_1\Phi_1 = R_2\Phi_2$. Les flux partiels sont donc inversement proportionnels aux résistances thermiques correspondantes; ils ne sont égaux que si ces résistances sont égales, ce qui, au demeurant, doit se trouver toujours réalisé, sauf précaution contraire ([2]).

On peut établir aussi ce résultat par la même méthode que ci-dessus. Le calcul, un peu moins simple, conduit bien au résultat cherché, à condition de considérer le chauffoir lui-même, bien qu'on néglige sa capacité, comme un milieu dans lequel se propage la chaleur, et de compter *deux* discontinuités distinctes de distribution initiale du flux : mur de gauche-chauffoir, et chauffoir-mur de droite, la valeur initiale du flux étant zéro *dans* le chauffoir.

L'égal partage initial du flux de chaleur est, à première vue, assez curieux, car, si l'expérience consistait à maintenir une source chaude à une température à peu près fixe, les quantités de chaleur cédées aux deux murs, même dans les premiers instants, dépendraient notablement de leurs caractères physiques.

C'est, en tous cas, une propriété *très précieuse*.

Dans l'étude de l'effet, sur un régime permanent établi, de perturbations survenant dans le chauffage, elle conduit à admettre que ces perturbations se partagent également entre les deux murs.

Et surtout, elle permet de *simplifier* considérablement la *méthode du signal* pour déterminer les propriétés thermiques d'un matériau (*loc. cit.*), en rendant inutiles l'emploi d'un nombre important de panneaux identiques, et les précautions prises pour rendre le dispositif très symétrique.

C'est une raison de plus pour s'attacher à tirer parti des *toutes premières manifestations d'un signal thermique*. Il suffit simplement d'un galvanomètre une centaine de fois plus sensible que le microampèremètre à aiguille qui nous avait servi : le moindre galvanomètre moderne le permet, et avec une réponse très rapide.

([2]) Dans le cas du montage expérimental étudié (*loc. cit.*), il ne s'agissait pas, à proprement parler, d'un chauffoir en contact imparfait avec les murs : au sein d'une masse d'air peu épaisse, de rares fils chauffant, déversaient de la chaleur, qui s'y diffusait grâce à une convection intense, de sorte que la source des flux de chaleur, c'était ce milieu de masse négligeable, chauffant directement les deux murs.

Mais le développement de Fourier, dont les exponentielles successives ne décroissent pas assez vite, ne convient pas pour préciser *pendant combien de temps* se maintient sensiblement le partage égal. Nous sommes parvenu à transformer, *explicitement et dans tous les cas*, la solution de Fourier en un développement facile à étudier pour les petites valeurs du temps.

THERMODYNAMIQUE. — *Sur la compression adiabatique avec remisage.* Note de M. **Jean Villey**, présentée par M. Émile Jouguet.

L'étude, aux régimes très lents, du procédé de carburation par transvasements Rochefort [1], qui permet d'alimenter des moteurs à explosion avec des combustibles lourds, conduit à envisager le problème schématique suivant, dont la solution présente des particularités intéressantes.

On comprime adiabatiquement dans un cylindre un gaz destiné à être ensuite évacué; mais, au moment où le volume du cylindre est V_0, une communication s'ouvre entre lui et une enceinte close, très bien calorifugée, de volume $\mathfrak{V}$, que nous appellerons collecteur; cette communication se referme au moment où le volume du cylindre est V_2. On suppose le déplacement du piston assez lent pour que soit négligeable la variation de volume $(V_0 - V_1)$ du cylindre pendant le temps très court nécessaire pour que les deux pressions $\mathfrak{P}_0$ (dans le collecteur) et P_0 (dans le cylindre) s'équilibrent à une valeur commune P_1. Il s'agit d'étudier l'influence que les transvasements ainsi provoqués exercent sur l'état $P_2 T_2$ du gaz contenu dans le cylindre au moment de la fermeture de la communication, et par conséquent aussi sur son évolution ultérieure au cours d'utilisation.

Si l'on répète indéfiniment cette opération, avec un état de départ $P_0 T_0$ de la cylindrée toujours le même, il est clair que la pression $\mathfrak{P}_0$ du collecteur au moment de l'ouverture, supposée initialement égale ou inférieure à P_0, ira d'abord en croissant. La question se pose immédiatement de savoir si la pression $\mathfrak{P}$ du collecteur tend vers une variation périodique, autrement dit s'il s'établit un *régime permanent*. Pour y répondre, le plus simple est de supposer ce régime permanent établi, et d'étudier ses caractéristiques : on pourra ainsi déterminer les conditions qui le rendent possible.

Il comporte évidemment l'égalité des masses transvasées dans l'un et

---

(1) *Comptes rendus*, **187**, 1928, p. 638 et 699; **201**, 1935, p. 774.

l'autre sens pendant l'ouverture de la communication, ainsi que la permanence des caractéristiques $P_2 T_2$ obtenues, et de la masse transvasée θM (que nous représentons ainsi en appelant $M = \mu P_0 V_0/T_0$ la masse de la cylindrée active, et θ le *coefficient de transvasement*).

La lenteur du refoulement entraîne que $\mathcal{P}$ reste égal à P à partir de la fin de la décharge qui les a égalées l'une et l'autre à P_1; cela donne en particulier $\mathcal{P}_2 = P_2$ au moment de la fermeture, et par conséquent aussi $\mathcal{P}_0 = P_2$ si nous supposons le collecteur assez parfaitement calorifugé pour conserver adiabatiquement le gaz qui y est remisé d'une opération à la suivante.

Le refoulement adiabatique effectué du volume $(V_0 + \mathcal{V})$ au volume $(V_2 + \mathcal{V})$ donne la relation $P_2/P_1 = (V_0 + \mathcal{V})^\gamma/(V_2 + \mathcal{V})^\gamma$. D'autre part la conservation de l'énergie au cours de la décharge donne, en supprimant partout le facteur $1/(\gamma - 1) = 2,44$ (gaz diatomiques), la relation

$$P_2 \mathcal{V} + P_0 V_0 = P_1(\mathcal{V} + V_0).$$

Elles donnent ensemble, pour un gaz diatomique,

$$P_2 \mathcal{V} + P_0 V_0 = P_2 \frac{(V_2 + \mathcal{V})^{1,41}}{(V_0 + \mathcal{V})^{1,41}} (\mathcal{V} + V_0),$$

ou, en posant

$$\frac{P_2}{P_0} = k, \qquad \frac{V_2}{V_0} = l, \qquad \frac{\mathcal{V}}{V_0} = h,$$

et en divisant partout par $P_0 V_0$,

$$kh + 1 = k\left(\frac{l+h}{1+h}\right)^{1,41} (h+1) = \frac{k(l+h)^{1,41}}{(1+h)^{0,41}},$$

d'où

$$k = \frac{(1+h)^{0,41}}{(l+h)^{1,41} - h(1+h)^{0,41}}.$$

Un régime permanent suppose évidemment P_2 fini et positif, et exige par conséquent

$$(l+h)^{1,41} > h(1+h)^{0,41},$$

ou

$$l + h > h^{0,71}(1+h)^{0,29},$$

ou

$$l > h^{0,71}(h+1)^{0,29} - h.$$

Le second membre, qui est nul pour $h = 0$, va en croissant avec h, c'est-à-dire avec le volume $\mathcal{V}$ du collecteur, pour tendre asymptotiquement vers la valeur 0,29 quand h augmente indéfiniment. On peut, en effet, l'écrire

$h(1+1/h)^{0,29}-h$, qui donne alors

$$h + h \times 0.29\frac{1}{h} + \varepsilon - h \to 0,29.$$

Il atteint déjà la valeur 0,222 pour $h = 1$, c'est-à-dire pour $\mathcal{V} = V_0$.

Si le coefficient $1/l$ de compression volumétrique du cylindre pendant la communication dépasse la valeur limite définie, en fonction de h, par cette inégalité, on ne pourra pas atteindre un régime permanent adiabatique : P_2 croîtrait indéfiniment par suite d'une augmentation indéfinie de la température T_2 due à la dissipation d'énergie par transvasement.

Mais l'adiabaticité du collecteur, qui est admise dans ce calcul, serait en pratique irréalisable avec une température T_2 indéfiniment croissante. En réalité on atteindrait un régime permanent non adiabatique lorsque la température T_2 aurait une valeur suffisante pour assurer l'évacuation de chaleur nécessaire à travers les parois.

Lorsque l et h satisfont à l'inégalité écrite plus haut, P_2 tend vers une limite finie, d'ailleurs rapidement atteinte si h est peu élevé. Le rapport h est essentiellement positif et le rapport l essentiellement compris entre zéro et 1 : cela donne pour k une valeur toujours plus grande que la valeur limite $k_0 = 1/l$[illegible], vers laquelle il tend pour $h = 0$: La dissipation d'énergie par les transvasements ne peut qu'élever la température T_2, c'est-à-dire élever la pression P_2 au-dessus de celle que donne la compression isentropique.

ÉLECTRICITÉ. — *Sur l'enlèvement des charges électriques au moyen d'un jet d'air intense.* Note de M. **Oleg Yadoff**, transmise par M. André Blondel.

Le problème que nous nous sommes proposé d'étudier consistait en un examen expérimental de la relation qui existe entre une charge électrostatique complètement isolée et l'action mécanique que cette charge subit de la part d'un jet d'air intense.

A cet effet nous avons réalisé une série d'expériences qui nous ont permis de déterminer quelques points importants de cette relation. Par exemple, avec une petite sphère en laiton de 35^{mm} de diamètre, placée à la distance de 10^{mm} dans l'axe d'une tuyère conique, légèrement convergente puis divergente (diamètre de l'orifice de sortie $D = 25^{mm}$), nous avons constaté que c'est à partir d'une vitesse moyenne de 410 m : s que les décharges devenaient bien appréciables ; cette expérience était réalisée dans l'air sec

et à la pression atmosphérique normale, l'état hygrométrique ([1]) étant $m:M=40$. Il semble, d'autre part, que c'est la vitesse hypersonique de 385 m : s qui détermine le commencement de la décharge accélérée pratiquement appréciable. Ces vitesses ont été calculées à partir de la pression à l'intérieur de la tuyère. Un grand réservoir d'air comprimé à 5 kg : cm² nous a permis de maintenir, pour un régime choisi, une pression et, par conséquent, une vitesse d'air constante. Des précautions spéciales de filtrage ont été réalisées de sorte que l'air projeté sur la sphère était desséché à un haut degré de précision. Le degré d'humidité de l'air ambiant était contrôlé au moyen de deux hygromètres à cheveux.

L'examen de la décharge était réalisé au moyen d'un électroscope à feuilles d'or, connecté à la petite sphère électrisée et placé à une distance suffisante pour permettre d'éliminer, en toute confiance, l'influence électrostatique réciproque. Nous avons pu contrôler ainsi à chaque instant les décharges en fonction du temps de la sphère préalablement électrisée au moyen d'une génératrice électrostatique. Avec un état hygrométrique égal à 40, la décharge libre de la sphère électrisée était très lente et il fallait attendre 32 minutes pour que les feuilles de l'électroscope, se rapprochant peu à peu, décrivent un angle de 100°. Sous l'influence du jet d'air (vitesse 410 m : s), cette même décharge était accomplie en 7 minutes. Elle est donc presque cinq fois plus rapide. Les conditions hygrométriques jouent un rôle important; l'accélération relative à la décharge augmentant quand l'état hygrométrique diminue.

Nous avons également réalisé une série d'expériences de même nature, mais en conduite fermée. Une pièce pisciforme en laiton était placée dans un tube isolant (50^{mm} de diamètre, 10^{mm} d'épaisseur). La disposition interne de cette pièce était telle que les sections de passage de l'air autour de la pièce décroissaient progressivement à partir de la section normale du tube jusqu'à l'orifice de sortie. La pointe de la pièce se trouvait dans la section plane min. de 8^{mm} de diamètre. Nous avons constaté dans ce cas qu'avec un état hygrométrique 60, la pièce se déchargeait normalement et les feuilles de l'électroscope décrivaient un angle de 100° en 1 minute. Sous l'action du courant d'air la décharge était accélérée du simple au double; les feuilles de l'électroscope décrivaient le même angle de 100° en 32 sec. Avec un état hygrométrique 50, la décharge à l'air libre était effectuée

([1]) Rapport de la masse de vapeur d'eau contenue dans 1^{m^3} d'air à celle que l'air contiendrait à la même température, s'il était saturé.

en 1 min. 45 sec., tandis qu'avec le courant d'air elle était réduite à 55 sec.

D'autres nombreuses expériences semblent confirmer cette proportion de 1 à 2 de la décharge accélérée dans le cas de cette pièce fuselée.

Ces phénomènes ont été observés aussi bien pour les charges positives que négatives.

Dans certaines conditions, la décharge sous l'action du courant d'air semblait être pratiquement instantanée.

Une description plus détaillée de ces phénomènes fera l'objet d'une publication spéciale.

SPECTROSCOPIE. — *La complexité des bandes* (CH ═) *des dérivés du benzène. Structure du benzène.* Note de M. **Pierre Barchewitz**, présentée par M. Aimé Cotton.

La position des bandes (CH ═) des dérivés monosubstitués du benzène dans le très proche infrarouge (6000-10000 Å) dépend du signe et de la grandeur du moment électrique des substituants ([1]). Suivant qu'on introduit des substituants à moments positifs (CH^3, NH^2, etc.) ou négatifs (F, Cl, Br, C ≡ N, NO^2, etc.), on observe des déplacements des bandes (CH ═) vers les grandes ou vers les courtes longueurs d'onde. Pour le nitrobenzène nous avons observé en plus du déplacement, un dédoublement très net des bandes (CH ═).

En ce qui concerne les dérivés disubstitués du benzène plusieurs cas sont à distinguer :

a. Si les substituants sont identiques, il y a un déplacement des bandes (CH ═) vers les grandes longueurs d'onde, s'ils ont un moment électrique positif et vers les courtes longueurs d'onde si leur moment est négatif. Les déplacements croissent dans l'ordre des substitutions : ortho, méta, para. Les dérivés para, bien qu'ils aient un moment total nul, donnent lieu au déplacement maximum des bandes qui apparaissent fines.

b. Si les substituants ont des moments électriques de signes contraires, les résultats sont plus complexes.

1°. Pour les dérivés ortho les bandes sont simples, le déplacement étant celui imposé par le plus grand moment électrique des deux substituants.

([1]) R. Freymann, *Annales de Physique*, 20, 1933, p. 300.

2° Pour les dérivés méta, le déplacement est plus grand que pour les dérivés ortho et les bandes apparaissent généralement dissymétriques.

3° Pour les dérivés para, les bandes sont doubles (fluoro, chloro, bromo et nitrotoluène); chaque composante occupe sensiblement la même position que celles des bandes relatives aux dérivés monosubstitués correspondants.

Structure du benzène. — Nous avons cherché à expliquer le dédoublement des bandes (CH=). Vers 3000 cm^{-1}, le benzène présente un certain nombre de bandes (dont deux particulièrement intenses) que l'on retrouve jusqu'au deuxième harmonique. Pour les harmoniques supérieurs (3e, 4e et 5e), les bandes sont simples mais apparaissent dissymétriques quand le benzène est étudié sous de grandes épaisseurs (250^{cm}). Ces bandes peuvent provenir des différents modes de vibration de la molécule de benzène.

L'étude des spectres Raman et de l'infrarouge lointain faite sur les dérivés du benzène a conduit différents auteurs [2] à admettre une symétrie sénaire pour le benzène. Pour expliquer le dédoublement des bandes du nitrobenzène, on pourrait supposer que certains modes de vibration doubles et dégénérés deviennent distincts lorsque le radical NO^2 est présent. Nous avons pensé au contraire que ce dédoublement était dû à une dissymétrie électronique dans le noyau benzénique, dissymétrie favorisée par la présence du radical NO^2 fortement électronégatif. On remarquera, en effet, que la symétrie sénaire a été établie par des recherches sur l'infrarouge lointain, région où seules les masses des atomes ou des radicaux [3] interviennent, de sorte que *ce sont pour les masses seules que l'on est conduit à admettre cette symétrie sénaire*. La répartition des charges électriques joue un rôle important dans notre région. On peut concevoir que l'introduction d'un groupement fortement électronégatif comme NO^2 fixe une *répartition ternaire* (G.-B. Bonino, *Trabajos del IX Congreso internacional de Quimica pura*, Madrid, 1934) *des charges* dans la molécule sans que la symétrie sénaire « massique » soit détruite.

Il en résulte que les vibrateurs (CH) placés en 2 et 4 par rapport à NO_2 sont directement influencés par ce groupement et donnent une bande fortement déplacée vers les courtes longueurs d'onde, tandis que les vibrateurs (CH) placés en 1, 3 et 5 moins liés à NO_2 donnent l'autre bande moins déplacée.

Cette hypothèse rendrait compte du dédoublement de la bande du nitro-

(2) J. Lecomte, *Journal de Physique*, 12, 1937, p. 489.
(3) Parodi, *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 337.

benzène, elle fournit une explication vraisemblable du dédoublement des bandes des dérivés para substitués du benzène.

L'introduction de deux groupements en para, l'un électropositif et l'autre électronégatif, fixerait la dissymétrie du noyau benzénique, les oscillateurs (CH) placés en 2 et 4 par rapport à chaque substituant sont directement influencés, on obtient ainsi une bande déplacée vers les grandes longueurs d'onde et une autre vers les courtes longueurs d'onde, comme l'imposent les moments électriques des deux substituants.

La symétrie sénaire du benzène n'est donc pas en contradiction avec une répartition à symétrie ternaire des charges électriques, mais au contraire la complète.

MAGNÉTOOPTIQUE. — *La variation thermique de la constante de Cotton-Mouton pour les hydrocarbures aromatiques liquides.* Note de M. **Charles F. Squire**, présentée par M. Aimé Cotton.

Les mesures récentes de A. Goldet (¹) sur la variation thermique de la biréfringence magnétique des composés aromatiques liquides confirment les déterminations d'autres auteurs et celles que Cotton et Mouton avaient faites déjà (²) : elles montrent bien que les formules données par les théories de Langevin et des physiciens qui faisaient comme lui des calculs pour le cas simple de l'état gazeux (³) ne représentent pas exactement cette variation thermique; celle-ci est en général (sauf pour le nitrobenzène) plus lente que leurs formules ne l'indiquaient.

La considération des interactions entre les molécules des liquides (Stuart, Debye etc.), interactions dont Magat (⁴) montrait récemment des exemples frappants, ne nous paraît pas suffire à expliquer ce désaccord quantitatif, parce que les actions mutuelles doivent jouer un rôle de moins en moins important quand la température s'élève.

Il nous paraît possible d'expliquer ces écarts, particulièrement dans le cas du benzène liquide, en les rattachant à l'explication donnée par A.-L. Sklar (⁵) du spectre d'absorption de ce liquide. Sklar a montré

(¹) *Thèse de doctorat*, Paris, 1938.
(²) *Ann. Chim. Phys.*, 20, 1910, p. 243.
(³) *Electric and Mag. Suscept.*, Oxford, 1932.
(⁴) *Ann. Phys.*, 6, 1936, p. 108.
(⁵) *Journ. Chem. Phys.*, 5, 1937, p. 669.

qu'une transition électronique, interdite par les règles de sélection, est permise dans le liquide parce que la symétrie de la molécule n'y reste plus exactement la même que dans le gaz. L'apparition de cet état se traduit par une bande d'absorption spéciale au liquide, à 2600 Å, beaucoup moins intense que la bande vers 2000 Å qu'on trouve dans le gaz comme dans le liquide. C'est pour cette raison que la susceptibilité diélectrique du benzène liquide ne varie pas, comme Sanger (6) l'avait montré, d'après la formule

$$\chi_{\text{élect}} = N\left(\alpha + \frac{\mu^2}{KT}\right),$$

parce que α n'est pas une constante, mais un terme qui croît avec la température. L'augmentation de α est due à l'augmentation de la probabilité pour une transition à un état électronique qui existe seulement dans le liquide. Cette augmentation est-elle due aux vibrations de Raman (7) ou à quelque autre mouvement thermique des molécules? On ne peut pas le dire, en tout cas la symétrie de la molécule change avec la température et l'état interdit devient permis.

L'effet Cotton-Mouton (et l'effet Kerr) traduit l'existence dans le champ d'une différence entre les indices de réfraction n_e et n_0 qui obéirait (dans le cas d'un liquide diagmagnétique), à la formule

$$n_e^2 - n_0^2 = NH^2\left(c_0 + \frac{c_1}{T}\right),$$

c_0 et c_1 varient avec la fréquence de l'onde lumineuse incidente, mais devraient être indépendants de la température.

Mais si la molécule, comme Sklar l'admet, passe par cet état interdit, c_0 doit augmenter avec la température : c'est pour cette raison que la biréfringence varie plus lentement que l'on ne s'y attendait, comme si la molécule avait une *anisotropie apparente* qui deviendrait plus grande quand la température s'élève.

(6) *Phys. Zeit.*, 27, 1926, p. 165.
(7) R. C. Lord et D. H. Andrews, *Journ. Chem. Phys.*, 5, 1937, p. 640.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Diffraction des rayons X par le silicochloroforme gazeux. Structure géométrique de la molécule* $SiHCl^3$. Note de M. **Maurice Henri Pirenne**, présentée par M. Aimé Cotton.

Nous avons utilisé la méthode de Debye pour déterminer la structure de $SiHCl^3$. Nous avons construit pour la diffraction des rayons X par le gaz une chambre en acier inoxydable, munie de fenêtres en mica, et analogue à celle de Van der Grinten et Pierard ([1]). La pureté du silicochloroforme utilisé a été vérifiée par des mesures statiques et dynamiques de sa tension de vapeur.

Les photographies ont été prises avec la radiation Kα du molybdène, isolée par un monochromateur à cristal de sel gemme. Un microphotomètre de Kipp nous a fourni les courbes de noircissement des clichés et celles des marques d'intensité obtenues à l'aide d'un secteur logarithmique tournant. A partir de ces microphotogrammes nous avons tracé la courbe de l'intensité diffractée en fonction de l'angle de diffraction. D'autre part nous avons calculé les courbes correspondant à différentes structures possibles de la pyramide $SiCl^3$, et nous avons constaté la concordance avec la courbe expérimentale pour les dimensions.

$$\text{Cl-Cl} = 3{,}27 \pm 0{,}03\,\text{Å}, \qquad \text{Si-Cl} = 1{,}98 \pm 0{,}02\,\text{Å}, \qquad \text{angle Cl-Si-Cl} = 111^\circ{,}5 \pm 1^\circ.$$

L'angle de valence peut être mesuré d'une façon précise dans cette molécule parce que le nombre atomique de l'atome central (Si) est du même ordre que celui de l'atome Cl; par contre, dans le cas de $CHCl^3$ il n'en est pas ainsi et l'angle de valence ne peut être mesuré avec précision ([2]).

Pendant que ce travail était en cours deux mesures par la méthode des rayons électroniques ont été publiées sur $SiHCl^3$:

	Cl-Cl.	Si-Cl.	Angle Cl-Si-Cl.
L. O. Brockway ([3])..................	–	2,00 ± 0,03 Å	110° ± 3°
M. de Hemptinne et J. Wouters ([4])...	3,39 Å	2,05 Å	111° ± 4°

([1]) W. Van der Grinten, *Physikalische Zeitschrift*, 34, 1933, p. 617; J. Pierard et W. Van der Grinten, *Congrès national des Sciences*, Bruxelles 1935, p. 347.

([2]) C. Degard, *Comptes rendus*, 201, 1935, p. 951.

([3]) *Rev. Modern Physics*, 8, 1936, p. 260.

([4]) *Nature*, 138, 1936, p. 884; 139, 1937, p. 928.

La concordance est bonne pour l'angle Cl-Si-Cl; nous croyons avoir obtenu une précision supérieure grâce à la mesure des maxima et minima bien marqués de la courbe d'intensité; dans la méthode des rayons électroniques on n'observe d'habitude pas de valeurs stationnaires, mais seulement des points d'inflexion.

L'angle de valence ne dépasse donc que de deux ou trois degrés l'angle d'un tétraèdre régulier : on ne peut admettre une structure plane du groupement $SiCl^3$, comme G. Urbain semble le proposer en s'appuyant sur des arguments chimiques et physiques ([5]).

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur le trimétaphosphate de calcium.* Note de M. **André Boullé**, présentée par M. Paul Lebeau.

Nous avons signalé ([1]) que les solutions neutres de nitrate et de chlorure de calcium ne précipitent pas lorsqu'on y ajoute une solution de trimétaphosphate de sodium. Le trimétaphosphate de calcium s'obtient néanmoins à l'aide du trimétaphosphate d'argent, corps peu soluble, que nous caractérisons par son spectre X. Nous avons d'abord vérifié que l'addition d'une solution glacée de chlorure de sodium à une bouillie également glacée de trimétaphosphate d'argent donne, après filtration et moyennant certaines précautions, un liquide clair d'où l'alcool précipite du trimétaphosphate de sodium. Ce mode de réaction conserve donc le degré de condensation du sel de sodium initial; appliqué, dans les mêmes conditions, à l'attaque du trimétaphosphate d'argent par une solution de chlorure de calcium, il fournit une liqueur claire que nous avons concentrée dans le vide à basse température. L'analyse des cristaux blancs qui se déposent donne les résultats suivants :

	P^2O^5.	CaO.	H^2O.	Formule.
Calculé pour P^2O^5, CaO, $3H^2O$...	56,36	22,22	21,4	P^2O^5; CaO; $3H^2O$
Première préparation............	55,05	23,16	22,5	P^2O^5; 1,06 CaO; 3,1 H^2O
Deuxième préparation............	55,64	23,53	21,4	P^2O^5; 1,07 CaO; 3,0 H^2O

L'addition d'alcool à la liqueur claire précédemment obtenue provoque

---

([5]) *La coordination des atomes dans les molécules* (*Actualités scientifiques et industrielles*, 53, 1933, p. 48).

([1]) Boullé, *Comptes rendus*, **202**, 1936, p. 1788.

la précipitation d'une poudre blanche de même composition que les cristaux analysés.

Le produit ainsi préparé doit être considéré comme le trimétaphosphate de calcium $[(PO^3)^3]^2Ca, 9H^2O$; sa composition centésimale est la même que celle de l'orthophosphate monocalcique hydraté. Mais les caractères analytiques des solutions (principalement la précipitation par le nitrate d'argent) et l'examen des spectres de poudres ne permettent aucune confusion. De plus, la déshydratation des deux corps ne s'effectue pas de la même manière. On sait que le phosphate monocalcique hydraté perd sa molécule d'eau de cristallisation à 110° en donnant du phosphate monocalcique anhydre cristallisé; au-dessus de 250°, nous avons montré ([2]) que l'eau de constitution s'élimine à son tour et qu'alors on a la variété A insoluble de métaphosphate $(PO^3)^2Ca$. Le trimétaphosphate de calcium perd 2^{mol} d'eau à 110° (perte évaluée par rapport à la formule brute $P^2O^5, CaO, 3H^2O$); dès cette température, le réseau cristallin est presque complètement détruit, le spectre X du produit séché à poids constant à 110° ne présente que quelques raies très faibles; pour éliminer la troisième molécule d'eau, il faut chauffer jusqu'à 350°. La substance anhydre obtenue est amorphe; par une calcination de plusieurs heures à $t \geq 550°$, elle cristallise en la variété B déjà signalée (*loc. cit.*) dans l'étude à haute température des métaphosphates de calcium.

En résumé, nous avons obtenu pour la première fois, par double décomposition avec un sel d'argent, le trimétaphosphate de calcium, corps soluble caractérisé par sa composition chimique, sa pyrogénation et son spectre de rayons X.

MÉTALLURGIE. — *Méthodes de dosage sur microprélèvements et applications aux études métallurgiques*. Note de MM. **Albert Portevin** et **André Leroy**, présentée par M. Léon Guillet.

L'étude des problèmes métallurgiques peut tirer un parti précieux de la microanalyse inorganique, comme l'ont déjà signalé C. Benedicks et R. Treje ([1]). Dans cette voie, nous nous sommes efforcés de mettre au point et d'appliquer des méthodes chimiques permettant la détermination

([2]) Boullé, *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 1343.

([1]) *Rev. Métallurgie*, 32, 1936, p. 203.

quantitative très précise des éléments d'un alliage, composants essentiels, additions ou impuretés, sur des prélèvements de l'ordre du milligramme. Le cas des aciers a surtout retenu notre attention; c'est d'ailleurs le domaine dans lequel l'application de la microanalyse spectrométallographique présente, pour le moment, le plus de difficultés pour un degré de précision comparable.

La microtitrimétrie nous a permis ainsi de doser le manganèse dans les aciers. Après attaque de l'échantillon par l'acide nitrique, on oxyde le manganèse à l'état d'acide permanganique au moyen de persulfate d'ammonium en présence de nitrate d'argent. Ces réactifs sont ajoutés au moyen de microburettes en quantités proportionnelles au poids d'échantillon traité. L'acide permanganique est titré par une solution arsénieuse en utilisant une microburette donnant des gouttes de $1/125^{cm^3}$. Le résultat est obtenu en une dizaine de minutes avec une erreur absolue de l'ordre de $0,5\gamma$, très inférieure à celle de la méthode colorimétrique directe.

Pour les microdosages de phosphore et de chrome, nous avons eu recours aux méthodes colorimétriques rendues très précises par l'emploi d'un colorimètre à cellules photoélectriques, mis au point par l'un de nous. Le dosage du phosphore repose sur le fait que l'acide phosphorique donne, avec le trioxyde molybdique, en présence d'un réducteur, un complexe bleu soluble; la méthode est applicable aux aciers et évite la séparation du phosphore à l'état de phosphomolybdate. L'échantillon, après attaque par un mélange d'acides sulfurique et nitrique, subit une oxydation par le permanganate; le phosphore étant ainsi passé à l'état d'acide phosphorique, on réduit le fer par une solution de bisulfite de sodium et le développement de la teinte bleue s'obtient par addition d'acide molybdique et de chlorure stanneux. Le silicium présent dans l'acier ne gène pas. Le temps pris par le dosage est de l'ordre de 30 minutes et l'erreur absolue reste toujours inférieure à $0^{\gamma},05$ de phosphore.

Le dosage du chrome utilise l'action oxydante des solutions de chromate sur la diphénylcarbazide, qui développe une coloration rouge. Après attaque de l'échantillon par l'acide sulfurique et oxydation par l'acide nitrique et le permanganate de potassium, le fer est précipité par le carbonate de sodium. C'est sur le chromate du filtrat que l'on opère la colorimétrie en présence d'acide sulfurique. Seul, le vanadium trouble le dosage. L'erreur absolue est de l'ordre de $0^{\gamma},04$ de chrome.

D'autres méthodes sont en cours d'étude ou de mise au point pour les éléments couramment rencontrés dans les aciers ordinaires et spéciaux.

Dès à présent, les méthodes précédemment indiquées sont mises en œuvre pour l'étude des problèmes suivants :

A. *Examen de l'hétérogénéité chimique congénitale ou de fabrication.* — L'exploration micromécanique (²) de la ségrégation majeure ou de l'hétérogénéité chimique (cas des soudures) demande, pour son interprétation, à être complétée par l'analyse des microéprouvettes essayées. Par des prélèvements encore plus localisés, il est possible de déterminer la répartition spatiale des éléments comme nous l'avons fait, pour le manganèse, sur une soudure de tôle de 10^{mm} d'épaisseur, en suivant de millimètre en millimètre la teneur de cet élément évaluée exactement en centièmes pour 100. L'application de ces méthodes microanalytiques permet de fixer, en outre, la valeur exacte des procédés d'exploration qualitative, par impression. Au cours de nos recherches sur les ségrégations phosphoreuses nous avons pu ainsi déterminer la variation du phosphore avec une erreur de l'ordre d'une unité sur la teneur exprimée en millièmes pour 100, pour des prélèvements distants de 1 à 2^{mm}. Pour certains échantillons, coulés en dimensions suffisantes, il nous est même possible d'atteindre la ségrégation mineure ou dendritique.

B. *Étude de la diffusion métallique.* — Dans le cas de la diffusion métallique des alliages, à l'état liquide ou solide, l'étude du phénomène par les méthodes physiques indirectes devient difficile ou impossible chaque fois que plusieurs éléments entrent en jeu. L'analyse microchimique permet alors de résoudre le problème et d'établir les courbes de diffusion.

C. *Étude des modifications chimiques superficielles* intentionnellement provoquées ou résultant d'attaques chimiques dues à la corrosion, par l'examen chimique des produits de corrosion détachables mécaniquement ou chimiquement solubles. C'est ainsi que nous sommes parvenus à opérer des dosages sur le contenu d'une piqûre de corrosion. Par exemple, le dosage du chrome dans la rouille provenant de la corrosion d'un acier à 2 pour 100 de chrome dans le nitrate d'ammonium à 20 pour 100, n'accuse qu'une teneur de 0,20 pour 100, ce qui montre indirectement l'enrichissement de la concentration du chrome à la surface du métal. Ces études chimiques des produits de la corrosion apportent d'utiles renseignements sur le mécanisme des attaques.

(²) A. Portevin et P. Chevenard, *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 319.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur le β_1-méthoxy-β_2-naphtoylacétate de méthyle.* Note de M. **Henri Wahl**, présentée par M. Marcel Delépine.

A. Wahl, M. Goedkoop et E. Heberlein [1] ont décrit les éthers α- et β-naphtoylacétiques, dont certains dérivés présentent de l'intérêt. Mais celui-ci se trouve amoindri par la difficulté que rencontrerait la préparation de grandes quantités d'acides α- ou β-naphtoïques.

J'ai pensé que, dans le cas de l'isomère β, il y aurait peut-être possibilité de remplacer l'acide β-naphtoïque par son dérivé hydroxylé, l'acide β-oxynaphtoïque (hydroxy-2-naphtalène-oïque-3) qui constitue la matière première des naphtazols ou naphtols AS que l'industrie des colorants fabrique en quantités massives.

Afin de pouvoir utiliser cet acide pour la condensation avec l'éther acétique sous l'action du sodium, il est nécessaire tout d'abord de bloquer la fonction phénolique, en l'éthérifiant par exemple. Le méthoxy-2-naphtoate de méthyle-3 a été obtenu par éthérification successive du carboxyle par l'alcool méthylique puis de l'hydroxyle par le sulfate de méthyle. C'est un corps cristallisé [2] fondant à 52° et bouillant à 200° sous 12^{mm}. Cet éther réagit avec l'acétate de méthyle sous l'action du sodium en fournissant l'éther β-cétonique avec un rendement de 85 pour 100.

Pour cela, on chauffe vers 100°, dans un ballon muni d'un agitateur et protégé de l'humidité, un mélange de méthoxynaphtoate de méthyle (200^g) et d'acétate de méthyle (200^g) auquel on ajoute peu à peu du sodium en morceaux (50^g). On constate alors la formation d'un précipité blanc qui rend bientôt l'agitation inefficace. On dilue alors la masse avec du toluène anhydre. Après la disparition du sodium (environ 20 heures) on essore le précipité et le lave à l'alcool puis à l'éther. Décomposé par un acide, ce sel de sodium fournit, à côté d'un peu d'acide méthoxynaphtoïque F. 133°, un composé cristallin F. 57° (éther de pétrole) qui bout vers 200° sous 2^{mm} en se décomposant légèrement. Sa composition correspond à la formule $C^{15}H^{14}O^4$ du β_1-*méthoxy*-β_2-*naphtoylacétate de méthyle* ou *méthoxy-2-naph-*

(1) *Comptes rendus*, **206**, 1938, p. 191.
(2) *Ber. d. Chem. Ges.*, **37**, 1904, p. 3661; **58**, 1925, p. 2119 et 2838.

talène (propanone-3'-oate de méthyle)-3, formé selon l'équation [3]

$$C_{10}H_6(OCH^3)(CO^2CH^3) + CH^3CO^2CH^3 = C_{10}H_6(OCH^3)(COCH^2CO^2CH^3) + C^2H^5OH$$

Il fournit les dérivés caractéristiques suivants qui démontrent sa constitution d'éther β cétonique :

Le *sel de cuivre* en feuillets vert pâle F.215° (xylène) s'obtient en agitant la solution éthérée avec une solution aqueuse d'acétate de cuivre. La *(méthoxy-2'-naphtyl) 3-isoxazol-3'-one-5* F.149°5, la *(méthoxy-2'-naphtyl) 3-pyrazol-3'-one-5* F.205°, la *(méthoxy-2'-naphtyl) 3-phényl-1-pyrazol-3'-one-5* F.175°, la *(méthoxy-2'-naphtyl)-3-nitro-4''-phényl-1-pyrazol-3'-one-5* F.235° se forment respectivement avec le chlorhydrate d'hydroxylamine, l'hydrate d'hydrazine, la phénylhydrazine, la *p*-nitrophénylhydrazine, en solution acétoalcoolique. Le nitrite d'amyle en solution acétique donne naissance à l'*isonitroso-2 (méthoxy-2'-naphtoyl) acétate de méthyle* F.131° et la copulation avec un sel de *p*-nitrobenzènediazonium conduit au *nitro-4''-benzène azo-2 (méthoxy-2'-naphtalène) (propanone-3-oate de méthyle)*-3', F.213°, feuillets jaunes.

D'autre part, l'ébullition avec l'acide sulfurique étendu (20 pour 100) dédouble l'éther β-cétonique en donnant naissance au méthoxy-2-acétyl-3-naphtalène F.48°. Cette cétone a déjà été obtenue par Friess et Schimmelschmidt [4], par action du chlorure de méthoxy-2-naphtoyle-3 sur l'iodure de zinc méthyle. Ils ont montré que cette cétone est différente du soi-disant méthoxy-2-acétyl-3-naphtalène décrit par Dilthey et Lipp [5] dans la condensation de la néroline avec le chlorure d'acétyle.

J'ai caractérisé cette cétone par les dérivés nouveaux suivants : *semi-carbazone* F.238-240°, *oxime* F.121°,5, *phénylhydrazone* F.146°, *p-nitrophénylhydrazone* F.226°. Lorsque l'ébullition est suffisamment prolongée (40 heures), on isole à côté de cette cétone un composé phénolique F.112°, qui est identique avec l'hydroxy-2-acétyl-3-naphtalène que l'on obtient aussi en traitant par Cl^3Al au sein du benzène le méthoxy-2-acétyl-3-naph-

---

(3) Analyse pour 100 : Tr. C 69,9, H 5,6; Calc. C 69,7, H 5,4.

(4) *Ber. d. Chem. Ges.*, 58, 1925, p. 2838; cf. *J. Chem. Soc.*, 1937, p. 482.

(5) *Ber. d. Chem. Ges.*, 56, 1923, p. 2443.

talène.

O CH^3
CO CH^3

OH
CO CH^3

L'éther-β_1 méthoxy-β_2 naphtoylacétique dont la préparation vient d'être décrite se prête à de nombreuses synthèses actuellement à l'étude.

GÉOLOGIE. — *Sur la présence du Silurien et du Dévonien au sud de Naïma* (*feuille* Oudja, *Maroc Oriental*). Note de MM. **Boris Owodenko**, **Henri Termier** et **Gaston Delépine**, transmise par M. Charles Barrois.

En 1933 l'un de nous (Owodenko) recueillit, dans les calcaires qui se trouvent en îlots au milieu des schistes non datés du massif des Zekkara, une faunule à Pentamères et *Platyceras*, différente de celles des calcaires carbonifères, déjà identifiés. En 1937, au cours de nouvelles recherches dans cette région, nous avons pu faire quelques observations complémentaires.

Ces calcaires sont situés à 11^{km} au sud de la gare de Naïma et à 3^{km} au nord de la casbah du Caïd des Zekkara, à l'est de la bifurcation des pistes de Sidi Atman et de Mouiter. Ils forment trois alignements Est-Ouest qui se succèdent du Nord au Sud, le plus long ayant 1400^{m} de longueur, et la largeur totale du groupe n'excédant pas 400^{m}. Leur affleurement est donc très limité. Ces calcaires se présentent tantôt en petits pitons, où le pendage, quand il est visible, se révèle nord, variable et assez faible, tantôt en amas de blocs simplement posés sur le substratum schisteux : il s'agit là d'une couverture autrefois plus importante et qui a été démantelée.

Chacune des bandes est bordée au Sud par de minces affleurements de phtanites engagés au milieu des schistes. Voici, du Sud au Nord, une coupe de détail intéressant le principal rocher calcaire, dont les coordonnées Lambert sont 792,38-437,45 :

1° schistes micacés verdâtres ou jaunâtres, non fissiles et se brisant en débris irréguliers;

2° phtanites en bancs réguliers mais à texture localement bréchoïde, épaisseur 2^{m};

3° schistes micacés verdâtres ou jaunâtres : 3^{m} à 4^{m};

4° calcaire-grauwacke bleu à zone d'altération brune, épaisseur $0^{m},50$;
5° calcaire coralligène : puissance atteignant une dizaine de mètres.

Les phtanites (terme 2) renferment *Climacograptus rectangularis* M' Coy, Cf. *Monograptus concinnus* Lapw, *Diplograptus insectiformis* Nichols, *Climacograptus scalaris* Hisinger, *Monograptus lobiferus* M' Coy, Cf. *Monograptus triangulatus* Harkness, déterminés par G. Waterlot, et dont l'association indique la zone à *Monograptus gregarius* ou zone 19, le Llandovery moyen, un des termes inférieurs du Gothlandien.

Le terme 5 a fourni des stromatopores, *Actinostroma* et *Stromatoporella*, des Polypiers composés, *Favosites*, *Pachypora*, *Striatopora*, *Heliolites*; des Gastéropodes et des Brachiopodes, Spirifères, Pentamères, Atrypides. Parmi ces derniers, *Atrypa comata* Barr, espèce des calcaires de Konieprusy en Bohème, de niveau F_2, étroitement apparentée à *Atrypa arimaspus* Eich, des calcaires éiféliens de l'Oural et du Bassin d'Ancenis [1].

Une telle faune montre que nous avons affaire à de l'Emsien ou à de l'Eifélien inférieur.

Comme les schistes micacés forment le mur et le toit des phtanites, on est tenté de leur attribuer un âge également silurien, et il faudra tenir compte de ce fait quand on cherchera à dater la « série du Mekkam » dont les schistes ont l'aspect habituel et dont ils semblent constituer le sommet.

Les bandes de calcaire dévonien et les phtanites gothlandiens qui les bordent au Sud démontrent, en effet, l'existence de synclinaux et paraissent même représenter les fonds de ces plis, lesquels sont orientés de l'Est à l'Ouest, cadrant ainsi avec les directions hercyniennes générales de la région d'Oujda. L'absence des phtanites sur les flancs nord des trois petits synclinaux pincés dans la masse des schistes peut faire songer à des étirements locaux.

Les calcaires dévoniens feront l'objet d'une étude plus approfondie. On peut déjà les rapprocher d'un niveau bien développé dans le Maroc Occidental, à Mechra ben Abbou, et d'une façon plus immédiate des calcaires de faciès Konieprusy découverts par G. Lucas [2] à 40 kilomètres plus à l'Est.

L'absence à Naïma d'une série de terrains allant du Gothlandien supérieur à l'Emsien, est-elle d'origine tectonique, ou bien due à des lacunes et érosions ? En ce dernier cas, elle confirmerait l'existence d'une terre

(1) Le Maitre, *Mém. Soc. Géol. Nord*, **12**, 1934, p. 66.
(2) *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 1123.

émergée sur le Maroc Central, se prolongeant jusqu'à Oujda, au début du Dévonien inférieur (³).

Du fait qu'il est le seul connu entre, d'une part, la région de Taza et la frontière algérienne, d'autre part, la zone espagnole et le Tamlet, l'affleurement siluro-dévonien que nous venons de signaler prend une grande importance pour la paléogéographie du Maroc Oriental.

GÉOLOGIE. — *Sur la formation de rides à l'Aalénien et au Bajocien dans le Haut-Atlas de Midelt.* Note de M. **Gonzague Dubar**, transmise par M. Charles Barrois.

Le Bajocien est transgressif sur le Lias supérieur ou moyen dans la vallée de la Moulouya et sur le bord nord du Haut-Atlas de Midelt, qui formaient un seuil immergé dès le Lias inférieur. Sur l'emplacement même de la chaîne, la sédimentation marneuse du Dogger paraît s'être étendue sans à-coup sur le Lias entièrement représenté, si leur étude est faite vers le centre des synclinaux. Mais aux points d'ennoyage de certains grands anticlinaux (dj. Masker, dj. Maoutfoud, dj. Aberdouz), là surtout où le Bajocien est encore conservé sur l'axe de ces plis, la succession est différente : le Lias apparaît plus ou moins érodé sous l'Aalénien supérieur ou le Bajocien, qui sont d'épaisseur réduite, plus ou moins grossièrement détritiques ou coralligènes,

1. Au Tizi n'Irhil, le Dogger recouvre ainsi l'axe liasique du dj. Masker. Entre Mchitt et le col, l'Aalénien, le Toarcien supérieur et moyen disparaissent; les marnes et grès feuilletés fossilifères du Toarcien inférieur supportent, près du col, deux lits de poudingue discontinus, séparés par quelques mètres de marnes. Le premier est aalénien supérieur (*Haplopleuroceras mundum* S. Buckm., *Ludwigella rudis* S. B., *Graphoceras* cf. *debille* S. B., *Liogryphaea bullata* Sow.). Le deuxième est rapporté au Bajocien; *Belemnopsis* cf. *Deshayesi* Mayer y abonde. *Emileia Sauzei* d'Orb. apparaît dans les calcaires marneux à quelques mètres plus haut.

Au Tizi n'Irhil même (1ᵉʳ col Est), des blocs de poudingue jalonnent le contact du Domérien inférieur fossilifère et des marnes qui semblent bajociennes : ces marnes contiennent *Belemnopsis Deshayesi* May. mêlées à des ammonites pyriteuses, en partie du Toarcien moyen remanié (*Phylloceras*

(³) M. Termier, *Études géologiques sur le Maroc Central*, Thèse, 1936, t. I, p. 333.

Nilssoni Héb., *Cæloceras acanthopsis* Monest. (non d'Orb.), *Harpoceras*, *Leukadiella*, *Ludwigia*, *Witchellia*). Les calcaires marneux au-dessus de ces marnes correspondent à ceux qui dominent le deuxième poudingue noté ci-dessus.

Vers l'Ouest, sur la crête, le Bajocien comprend ensuite, jusqu'au col principal, des calcaires marneux puis gréseux : plus loin, des bancs coralligènes avec oursins, algues calcaires, les recouvrent et passent à une formation de grès graveleux et de brèches dont les éléments semblent venir de tous les niveaux antérieurs du Secondaire, mêlés de fossiles bajociens (150^{m} d'épaisseur) : enfin vient la série marno-calcaire du Tamdarkane.

L'anticlinal liasique d'Aït Hamza relaie vers l'Ouest celui du Masker; là aussi un poudingue bajocien (*Belemnopsis Deshayesi*) à éléments toarciens (*Cæloceras acanthopsis* Mon.) repose au Nord sur les marnes toarciennes sans Aalénien.

Ces conglomérats aaléniens et bajociens sont localisés sur l'axe du pli et ne se rencontrent ni au Sud (d'Arheddou à Anefgou), ni au Nord (de Bou Adil à Idikel), où ces étages sont presque uniquement marneux.

2. A l'ennoyage vers l'Est du pli de l'Ayachi soudé au pli du Maoutfoud, dès la base du Bajocien, les poudingues, parfois très épais, alternent avec des marnes et des lits à polypiers au Sud-Ouest du col de Telrhemt jusqu'à la vallée de Sidi Hamza. Ces poudingues sont à peine représentés vers la Moulouya et manquent au Sud vers Rich.

3. L'anticlinal du dj. Aberdouz paraît avoir été soumis à des mouvements semblables entre Lias et Bajocien : la montagne chevauche actuellement au Sud : l'Aalénien du flanc Nord n'est représenté que par quelques bancs calcaires et un poudingue (*Ludwigia* du gr. de *Murchisonæ* Sow., *Ludwigia* sp., *Hammatoceras Lorteti* Dum.), recouvert comme au Tizi n'Irhil, par un deuxième poudingue bajocien inférieur (*Belemnopsis* cf. *Deshayesi*, *Sphæroceras meniscus* Waag.) ; les calcaires zoogènes prennent ensuite un grand développement. Au contraire, au Sud de l'Aberdouz, l'Aalénien est en subsidence et dépasse 1000^{m} vers Outerbat, et le Bajocien est surtout marneux, avec quelques récifs.

4. Un troisième anticlinal, le dj. Amejegarh, entre Outerbat et Assoul, montre une réduction rapide du Bajocien sur son flanc Nord; à son ennoyage vers l'Ouest, l'axe du pli ne comprend plus que les basaltes et marnes rouges triasiques ou infraliasiques, sur lesquels s'appuient, sans doute par transgression, les calcaires bajociens.

Il apparaît de ces quelques faits qu'au Sud de Midelt le fond du sillon

atlasique, si régulier au Domérien [1], a été parcouru, à l'Aalénien supérieur, de rides qui se sont développées plus ou moins au début et vers le milieu du Bajocien; ces rides coïncident avec les plis principaux de l'Atlas.

PHYSIQUE DU GLOBE. — *L'aurore boréale du 25 janvier 1938 observée au Pic du Midi.* Note de MM. **Hubert Garrigue** et **Henri Camichel**, présentée par M. Charles Fabry.

Description. — C'est à 20h50 que l'un de nous signala un phénomène extraordinaire, caractérisé, à première vue, par l'embrasement du ciel au voisinage du pôle. Nous avons aussitôt noté tous les détails du phénomène et nous l'avons observé visuellement au moyen d'un petit spectroscope de poche à vision directe.

L'un de nous a préparé en même temps les deux spectrographes spéciaux qu'il utilise pour l'étude du ciel nocturne, dont l'un, d'ouverture numérique $f:0,5$, enregistre automatiquement les spectres avec des poses de 15 minutes, et l'autre, de plus grande dispersion et d'ouverture $f:1,6$, donne un seul spectre en quelques heures de pose. Un appareil photographique ouvert à $f:3,5$ a été également installé et une pose de 6 heures en lumière verte a été obtenue sur le ciel, vers l'horizon Nord.

Au début de l'observation, une lueur rouge au N-W, une autre au N-N-E, s'étendent jusqu'à une hauteur dépassant celle de l'étoile polaire. La lueur du N-W est traversée de bandes rectilignes larges, lentement variables, dont la couleur semble jaune ou verdâtre. L'examen visuel de la lueur rouge au spectroscope montre très nettement un groupe d'émission vers le rouge sombre, 6300 Å. Au Nord, une lueur verte, vive, s'étend jusqu'à 15° au-dessus de l'horizon; elle montre au même spectroscope, la raie verte seule, très brillante. L'ensemble de l'illumination s'étend à peu près sur le tiers nord du ciel, 120° d'arc.

Vers 21h, la lueur verte s'élargit et devient plus intense tandis que les lueurs rouges s'estompent.

A 21h30, une bande rectiligne assez vive apparaît en plein Nord et s'étend de quelques degrés de l'horizon jusqu'à 50°. Les lueurs rouges

---

(1) Des brèches sédimentaires du Toarcien moyen ont été aussi reconnues près de Tanerhift, au milieu de l'Atlas; mais ce fait est encore isolé.

sont très affaiblies, la lueur verte s'est aplatie et une nouvelle lueur très vive, verte également, est apparue au N-NE.

A $21^{h}35$, une bande rectiligne large apparaît vers le N-NE.

A $21^{h}40$, l'éclat de la lueur verte au Nord augmente vers 8° au-dessus de l'horizon.

A $21^{h}41$, l'activité générale reprend : le rouge devient plus intense, et de nombreuses bandes rectilignes *d'aspect parallèle* apparaissent sur tout le tiers nord du ciel. Ces bandes évoluent et disparaissent rapidement.

A $21^{h}45$, la lueur verte du Nord se détache de l'horizon, de quelques degrés, elle est surmontée d'une lueur rouge et encadrée à l'Ouest d'une lueur rouge et verte et à l'Est d'une lueur rouge.

A $21^{h}50$, une bande rectiligne vive, à fluctuation très rapide de l'ordre du dixième de seconde, et de couleur jaunâtre apparaît à l'Ouest, à 20° environ du Nord et sur une hauteur de 40°.

A $21^{h}53$, la zone verte à l'Est se renforce, à 10° au-dessus de l'horizon.

A $21^{h}54$, cette zone devient très intense, tandis que subsiste seulement à l'Ouest une lueur rouge très vague.

A 22^{h}, de nouvelles bandes rectilignes apparaissent à l'Ouest, à 10° du Nord.

A $22^{h}03$, l'éclat général diminue.

A $23^{h}00$, seule semble subsister la lueur verte du Nord, en forme d'arc, elle ne s'étend qu'à 3° au-dessus de l'horizon, mais elle est très intense.

A $23^{h}15$, l'éclat de cette lueur diminue.

A $1^{h}00$, le 26 janvier, toute intensité anormale semble avoir disparu.

Intensités. — En tenant compte des observations visuelles spectroscopiques, des clichés de spectres et de la photographie du ciel, on a pu évaluer grossièrement la brillance maxima des lueurs rouges et vertes et l'éclairement produit par ces lueurs sur une surface horizontale, en prenant pour unité la brillance à l'horizon d'un ciel nocturne normal sans Lune, ainsi que l'éclairement qu'il produit sur le sol. C'est ce que montre le tableau suivant :

	Heure	$20^{h}50^{m}$.	$21^{h}00^{m}$.	$21^{h}30^{m}$.	$21^{h}40^{m}$.	$21^{h}41^{m}$.	$21^{h}53^{m}$.	$21^{h}54^{m}$.	$22^{h}03^{m}$.	$23^{h}00^{m}$.	$23^{h}15^{m}$.	1^{h}
Brillance	verte	100	125	125	125	125	150	175	150	175	75	
	rouge	100	50	25	20	50	25	20	5	–	–	
Éclairement	vert	3	3	4	3	5	5	5	3	2	1	
	rouge	5	2	2	1	2	2	2	1	–	–	

Bandes rectilignes. — Ces bandes sont toujours apparues, au-dessus de l'horizon, jusque vers 50°, dans une direction invariable pendant toute la

durée du phénomène. Elles se présentaient donc toutes parallèles entre elles et légèrement inclinées, leur extrémité supérieure penchant vers l'Est de quelques degrés.

Spectres. — L'enregistrement des spectres de 22^{h}45 à 2^{h}15, avec des poses de 15 minutes, a montré un nouveau maximum d'activité générale vers 0^{h}30. Les spectres présentent, de façon régulière et avec beaucoup d'intensité, la raie verte des aurores ainsi qu'un groupe rouge.

Cependant, au maximum d'activité de 0^{h}30, on voit les raies et bandes de l'aurore boréale dans le bleu et le violet.

Le spectre obtenu à grande dispersion montre l'existence d'un groupe de deux raies intenses très voisines vers la longueur d'onde 6300 Å. La raie verte des aurores, seule visible dans le reste du spectre, est particulièrement brillante.

Conclusion. — L'allure et l'intensité de cette aurore boréale la classent parmi les plus exceptionnelles et les plus remarquables que l'on puisse observer sous cette latitude (43°).

L'un de nous a montré que la raie verte pouvait prendre une intensité, vers l'horizon nord, égale à quelques fois la valeur trouvée pour un ciel nocturne normal; cette fois-ci, son intensité était de 200 à 400 fois plus élevée. De plus l'émission rouge contenait deux raies voisines.

Enfin aucun des spectres obtenus n'a montré de traces d'intensité exceptionnelle de la bande jaune 3888 Å observée normalement dans la lumière du ciel nocturne.

Cette aurore très brillante est la première qui ait été observée au Pic du Midi.

CHIMIE VÉGÉTALE. — *Présence d'un aldéhyde-alcool en* C^{18} *dans la pulpe d'olive.* Note de M. **Henri Marcelet**, présentée par M. Richard Fosse.

L'huile ayant été retirée par pression de l'olive, la pulpe, séparée ou non des grignons, est épuisée par des solvants volatils pour en extraire les dernières traces de matière grasse.

Ayant eu à examiner un grand nombre d'échantillons de pulpe, j'ai constaté qu'en prolongeant pendant plusieurs heures l'épuisement au Soxhlet par l'éther ou le trichloréthylène, une poudre blanche, soluble à chaud dans ces solvants, était extraite en même temps que l'huile.

J'ai séparé et purifié cette poudre par de nombreux lavages à l'éther froid, puis l'ai dissoute dans l'alcool à 95° chaud; elle s'est toujours déposée à l'état amorphe malgré de multiples reprises par le solvant.

Point de fusion	246°
Acidité exprimée en acide oléique	5,59 %
Indice de saponification	34
» d'iode Hanus	40
» d'acétyle (André)	137

Les essais d'identification ont fait constater la présence des fonctions aldéhyde et alcool tertiaire: la liqueur de Fehling n'est pas réduite.

Les dérivés suivants ont été obtenus :

	P. F.
Acétylé	195°
Benzoylé	170
Mercurique (Denigès)	211
Bromé	205
Hydrazone de l'aldéhyde	241
Oxime aldéhydique	200

Poids moléculaire, déterminé par cryoscopie 320, par ébulliométrie 317.

Analyse élémentaire. — Carbone 68,93; hydrogène 10,42; oxygène 20,65.

Ces résultats correspondent à un produit répondant à la formule

$$C^{18}H^{36}O^{4}, \text{ P. M. } 316,$$

pouvant être, par suite de sa fonction aldéhyde et alcool, considéré comme un terme intermédiaire entre un sucre, que j'ai isolé de l'olive et dont l'étude est en cours, et les glycérides constituant l'huile d'olive.

Afin de rappeler l'origine et la composition de ce produit je propose de le nommer *aldoléol*.

PHYSIOLOGIE — *La guérison du déséquilibre alimentaire glucidique aigu chez le Pigeon et sa répercussion sur le métabolisme glucidique musculaire*. Note de MM. **Raoul Lecoq** et **Roger Duffau**, présentée par M. Emmanuel Leclainche.

Nous avons montré antérieurement que le déséquilibre alimentaire glucidique aigu, obtenu chez le Pigeon par ingestion d'une ration renfer-

mant 66 pour 100 de galactose et complétée par une large dose de levure de bière, bonne source de vitamines B, entraîne, ainsi que l'avitaminose B totale, une imprégnation lactique importante du tissu musculaire et une augmentation du taux des composés réducteurs glucidiques, des orthophosphates et du phosphore total acido-soluble (1). Dans l'un et l'autre cas, les perturbations du métabolisme glucidique musculaire s'accompagnent de crises polynévritiques typiques; mais alors que les accidents avitaminiques cessent par ingestion de levure de bière desséchée ou par injection de vitamine B_1 cristallisée, les manifestations du déséquilibre alimentaire subsistent, malgré l'ingestion quotidienne de fortes doses de levure de bière, 4^g par exemple, associée ou non à l'injection également quotidienne de doses élevées de vitamine B_1 cristallisée, 10000 unités-pigeon par exemple (2). Il était intéressant de rechercher la raison des échecs observés jusque-là dans la guérison des troubles du déséquilibre alimentaire glucidique, et surtout d'essayer d'autres moyens, en s'aidant de la connaissance des variations des divers constituants musculaires.

De nombreuses tentatives furent entreprises en utilisant des doses, faibles d'abord, puis élevées, de solutions de glucose, de bicarbonate de sodium, d'insuline, de glutathion, d'extraits tyroïdien, surrénal ou hypophysaire, ces divers traitements étant parfois associés entre eux pour en conjuguer les effets. Mais les crises polynévritiques subsistèrent, entraînant dans tous les cas la mort des sujets, quel que soit le traitement mis en œuvre. Nous avons alors pensé que le meilleur moyen de guérir le trouble nutritif et les accidents dus au déséquilibre alimentaire glucidique aigu, était de soumettre les animaux atteints à un régime glucidique équilibré.

Cinq lots de trois pigeons adultes, de 350^g environ, furent constitués, lesquels absorbèrent quotidiennement et par gavage, 20^g du régime à 66 pour 100 de galactose, préconisé par Mme Randoin et Lecoq, additionné de 4^g de levure de bière désséchée et pulvérisée; de l'eau distillée était fournie par ailleurs *ad libitum*. Les sujets du premier lot furent gardés comme témoins; ceux des 2e et 3e reçurent quotidiennement et respectivement, en injections hypodermiques, 5000 et 10000 unités-pigeon de vitamine B_1 cristallisée. Les pigeons des 4e et 5e lots, maintenus 6 jours au régime à 66 pour 100 de galactose (avec levure), reçurent ensuite (alors qu'ils étaient proches du terme fatal), et pendant une dizaine de jours, un

(1) R. Lecoq et R. Duffau, *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 449.

(2) R. Lecoq, *Déséquilibres alimentaires et nutritifs*, Paris, 1938, p. 108.

régime à 66 pour 100 de glucose; le glucose, aliment d'équilibre, étant ici substitué au galactose, aliment de déséquilibre. Dans le premier cas, le régime au glucose fut donné sans addition de levure (régime producteur d'avitaminose B), il fut par contre, dans le second cas, additionné de 2g de levure par jour (proportion optima de vitamines B).

Les pigeons des lots 1, 2 et 3 présentèrent jusqu'à leur mort, survenant le plus souvent le 7e ou le 8e jour, des crises cérébelleuses typiques. Par contre, ceux des 4e et 5e lots cessèrent les crises cérébelleuses dès la fin du régime déséquilibré; toutefois, une paralysie atténuée des pattes subsistait lorsque le régime ne comportait pas de levure, alors que le régime dûment complété assurait une reprise de l'état normal des animaux.

Ces faits étant acquis, une nouvelle série d'expériences fut entreprise. Les sujets des trois premiers lots furent tués par décapitation après six jours, et ceux des 4e et 5e lots après six jours de régime au glucose. Les muscles pectoraux furent ensuite rapidement prélevés, avec toutes les précautions habituelles, et les principaux éléments du métabolisme musculaire dosés suivant les techniques précédemment précisées par l'un de nous ([3]). Les résultats obtenus ont été groupés dans le tableau ci-dessous, chaque colonne donnant la moyenne de trois sujets. Nous y adjoignons à titre de comparaison les chiffres obtenus sur un dernier lot de pigeons maintenus, pendant un mois, au régime à 66 pour 100 de glucose, complété quotidiennement par 2g de levure de bière desséchée.

Dosages effectués sur le muscle (en milligrammes pour 100).

	Pigeons au régime à 66 pour 100 de galactose +4g de levure.	Pigeons au régime à 66 pour 100 de galactose complété par 4g de levure. +5000 unités-pigeon vitamine B_1.	+10000 unités-pigeon vitamine B_1.	Pigeons au régime au galactose +4g de levure puis au régime à 66 pour 100 de glucose. Sans levure.	+2g de lev.	Pigeon au régim à 66 pour de gluco +2g de lev
Composés réducteurs glucidiques totaux	320	224	182	265	316	220
Acide lactique	314	309	244	253	186	213
Orthophosphates	117	126	96	75	82	74
Acide créatine-phosphorique	12	10	8	8	7,5	9
Acide adényl-pyrophosphorique	19	23,5	28,5	23	24,5	26
Esters facilement hydrolysables	20	19,5	18	21	20,5	24
Phosphore total acido-soluble	226	230	189	191	177	170

([3]) R. Duffau, *Thèse Doct. Pharm.*, Paris, 1937.

Conclusions. — Dans le traitement des crises polynévritiques dues au déséquilibre alimentaire glucidique aigu, le rétablissement de l'équilibre de la ration l'emporte en importance sur l'ingestion de vitamines B et l'injection de vitamine B_1 cristallisée.

Les crises cérébelleuses ne semblent pas influencées par la chute du taux des composés réducteurs glucidiques musculaires, occasionnée par l'injection de fortes doses de vitamine B_1 ; elles cèdent, par contre, à l'action d'un régime équilibré, même avitaminé, on enregistre alors une diminution des orthophosphates musculaires.

La guérison complète des accidents polynévritiques (cérébelleux et paralytiques) ne peut être obtenue qu'avec un régime équilibré, normalement vitaminé; elle s'accompagne d'un retour à la normale, dans le muscle, du taux de l'acide lactique et des différents composés phosphorés.

GÉNÉTIQUE. — *Hérédité du taux leucocytaire du sang chez la Souris.* Note [1] de M. **Serge Tchakhotine**, présentée par M. Maurice Caullery.

Les variations du nombre des leucocytes dans le sang de l'homme et des animaux, en dehors des modifications physiologiques relevant de distribution des globules blancs dans le système vasculaire (digestion, excitation, choc), servent d'indice de réactions de défense de l'organisme dans certains états pathologiques de nature infectieuse, et aussi dans les leucémies, qui constituent en elles-mêmes une entité morbide.

Lors de mes travaux antérieurs sur la leucocytose dans le cancer greffé, chez la Souris et le Rat [2], je m'étais aperçu qu'en employant, pour l'inoculation du cancer, des individus d'une même portée et non d'origine quelconque, le taux leucocytaire avant la greffe était très souvent le même ou à peu près, chez les représentants d'une même famille, et différait nettement de celui d'une autre famille. Cette observation m'amena à vérifier ces données sur les diverses souches de Souris, utilisées dans les recherches de Génétique. J'ai pu avoir à ma disposition des reproducteurs de deux

(1) Séance du 24 janvier 1938.

(2) *Boll. Soc. ital. Biol. Sper.*, 4, 1929, p. 470.

souches différentes de Souris : l'une blanche (RIII), donnant un pourcentage très haut [plus de 70 pour 100, selon Dobrovolskaïa-Zavadskaïa ([3])] de cancer spontané de la mamelle chez les femelles; l'autre noire (XLI), une souche américaine, ne donnant jamais de cancer spontané. En déterminant le nombre des globules blancs chez les représentants de ces deux souches, je pus constater qu'il différait sensiblement dans les deux cas.

Dans ces recherches je comptais (0^{mm^3},1 de sang, prélevé à la queue, cellule Thoma-Zeiss) simultanément, en les différenciant, les mono- et les polynucléaires, dont la somme exprimait le taux leucocytaire global. Le rapport des mono- et des poly- donne un coefficient (M/P) qui permet de juger si l'animal est sain, ou s'il se trouve dans un état spécial de réaction, à cause d'un phénomène morbide quelconque, en d'autres termes, si les chiffres qu'on obtient peuvent être considérés comme normaux ou non. Le coefficient M/P est égal à 3 environ, dans l'état de santé parfaite; si sa valeur est sensiblement au-dessus ou au-dessous de ce chiffre, c'est un indice qu'il y a une réaction particulière et le taux observé ne peut pas être utilisé pour nos buts.

En déterminant donc le taux leucocytaire chez des individus sains, appartenant aux deux souches mentionnées, RIII et XLI, on voit que, chez les premiers, le taux leucocytaire est à peu près trois fois plus élevé que chez les seconds (20 à 24 milles chez les RIII, 5 à 9 chez les XLI). Voici des exemples :

Souche RIII.					*Souche* XLI.				
Sexe.	Taux.	Mono : Poly.	%.	M/P.	Sexe.	Taux.	Mono : Poly.	%.	M/P.
♀ ...	22000	17:5	77:23	3,3	♂ ...	9000	7:2	77:23	3,3
♂ ...	25000	20:5	80:20	4,0	♂ ...	6000	5:1	83:17	4,8
♀ ...	26000	20:6	77:23	3,3	♀ ...	4000	3:1	75:25	3,0
♂ ...	22000	15:7	68:32	2,1 (*)	♀ ...	5000	4:1	80:20	4,0
					♂ ...	8000	4:4	50:50	1,0 (*)
					♂ ...	8000	7:1	87:13	6,7 (*)

(*) Anomalies, donc inutilisables.

Le nombre était aussi assez constant chez les parents et les enfants de la même famille, par exemple (en milliers de leucocytes) :

RIII : père 26, mère 16, fille 26, fille 22.

XLI : père 6, mère 5, fils 8, fille 8, fille 9, fille 12.

([3]) *Journ. of Genet.*, 27, 1933, p. 181.

En croisant les animaux de ces deux lignées différentes, on a obtenu

XLI ♂ (8 000) — RIII ♀ (25 000)

♀	♀	♀	♀	♀	♀	♂	♂	♂
17	8	8	6	3	6	13	23	10

RIII ♂ (22 000) — XDI ♀ (8 000)

♀	♀	♀	♂
10	20	12	6

Le taux leucocytaire peut donc être transmis par hérédité et plus spécialement *il est lié au sexe :* chez les jeunes femelles, les chiffres se rapprochent de celui de leur père, et, chez les jeunes mâles, de celui de leur mère.

Un exemple frappant de stabilité familiale du taux leucocytaire et même du rapport leucocytaire (M/P) est fourni par deux sœurs (grises), issues d'un croisement entre un père noir (XLI) et une mère blanche (RIII). A l'âge de 6 semaines, le taux global est, chez toutes les deux, égal à 12000, le M/P à 4,8; à l'âge de 2 mois, 8000 et 3,0; de 3 mois, 9000 et 7000, la dernière étant devenue gravide.

En croisant ensuite des individus de la même génération F_1 (grise), on a obtenu, dans la génération F_2, les résultats suivants, conformes à la loi de Mendel : il y a eu, en effet, dans cette génération, une disjonction de caractères : des cinq enfants, trois étaient gris, un était noir et un blanc. Le taux leucocytaire du noir (♂) s'est montré égal à 4000; celui du blanc (♀) égal à 15000; chez les gris, les mâles avaient 10000 et 6000, et la femelle 18000. Chez ces trois derniers (gris), le taux leucocytaire se présente comme intermédiaire, tandis que dans les deux autres individus (blanc et noir), récessifs, les caractéristiques initiales des grands-parents, en ce qui concerne la couleur et le taux leucocytaire, ont réapparu. Ce cas montre encore une fois que, chez les trois descendants gris F_2, les deux mâles, avec 10000 et 6000, diffèrent de leur sœur qui en a 18000. C'est une conséquence du fait que les fils ont hérité le caractère en question de la mère, dont le taux était égal à 12000, et la fille, du père qui en avait 23000.

Ces faits démontrent que le taux lococytaire, qui est un indice de réaction défensive de l'organisme, peut être considéré comme un facteur relativement stable et un caractère se transmettant par hérédité.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Optimum de solubilité et point isoionique des pseudoglobulines du sérum de cheval.* Note de MM. **Jean Jacques Pérez** et **Georges Sandor**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

Il est généralement admis que les protéides présentent un minimum de solubilité à leur point isoélectrique. Cependant, comme nous l'avons déjà montré dans de précédentes communications [1], en présence d'un excès de sels neutres, ce minimum de solubilité ne paraît pas coïncider avec le point isoélectrique.

Pour préciser la relation qui doit exister entre l'état électrochimique d'un protéide et sa solubilité en présence de fortes concentrations salines, nous avons étudié parallèlement le point isoionique et la solubilité en fonction du pH de la pseudoglobuline du sérum de cheval, en présence d'un excès de sels neutres.

Technique. — Nous avons réalisé une série de mélanges de même volume en nous plaçant dans des conditions telles que la concentration en anions sulfate soit rigoureusement constante et qu'il en soit presque de même pour la concentration en cations sodium, tandis que nous faisions varier dans de larges limites la concentration en ions hydrogène. A chacun de ces mélanges nous ajoutions un même volume d'une solution de pseudoglobulines de concentration connue. Après un temps donné, le même pour chaque mélange, le précipité formé était séparé par centrifugation, puis on mesurait la teneur en azote et le pH des eaux mères.

D'autre part le point isoionique de la pseudoglobuline était déterminé par la méthode décrite par l'un de nous [2].

La solution de pseudoglobuline utilisée était obtenue à partir du sérum de cheval en précipitant les globulines par le sulfate d'ammonium à demi-saturation, puis en dialysant à la glacière les globulines pendant deux à trois semaines pour éliminer toute impureté ionique et précipiter entièrement les euglobulines.

Voici les résultats de deux expériences. Pour l'une la durée de précipitation fut de 10 minutes, pour l'autre de 16 heures.

a. Durée de précipitation, 10 minutes.

---

(1) G. Sandor et A. E. Bonnefoi, *Bull. Soc. Chim. Biol.*, **15**, 1933, p. 1472; G. Sandor, A. E. Bonnefoi et J. J. Pérez, *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 1254.

(2) G. Sandor, *Bull. Soc. Chim. Biol.*, **18**, 1936, p. 877.

Concentration en sulfate de sodium, 12 pour 100.
Concentration en protéides du mélange initial, 4,14 pour 100.
Concentration en azote du mélange initial, 0,657 pour 100.
Point isoionique, pH 5,7.
pH de la solution, **8,54; 7,38; 6,84; 6,14; 5,74; 5,23; 4,66; 4,33.**
N soluble p. 1000, 4,76; 4,93; 5,25; 5,34; 5,52; 5,42; 4,91; 3,30.

b. Durée de précipitation, 16 heures.

Concentration en sulfate de sodium, 12 pour 100.
Concentration en protéides du mélange initial, 3,29 pour 100.
Concentration en azote du mélange initial, 0,505 pour 100.
Point isoionique, 5,9.
pH de la solution, **7,58; 7,32; 6,20; 5,92; 5,60; 5,22; 4,26.**
N soluble p. 1000, 3,61; 3,78; 4,31; 4,50; 4,45; 4,44; 2,70.

Il est manifeste que le maximum de solubilité coïncide exactement avec le point isoionique des pseudoglobulines.

Par conséquent, si le point isoionique paraît coïncider avec un optimum de précipitation pour les protéides en l'absence ou en présence de traces seulement de sels neutres, en présence d'un excès de sels, il coïncide, tout au contraire, avec un optimum de solubilité. Ce fait pourrait être mis en accord avec la théorie de Debye-Hueckel sur l'activité ionique; il nous conduit à penser que la précipitation des protéides par les sels neutres est due à une influence de ceux-ci sur l'activité ionique. Enfin, s'il est certain que c'est bien le point isoionique qui est le facteur déterminant parmi les conditions dont dépend la solubilité d'un protéide, il est, par contre, peu probable qu'il en soit de même pour le point isoélectrique puisque l'optimum de solubilité coïncide avec le point isoionique et que ce dernier, en présence d'un excès de sels, doit être sensiblement différent du point isoélectrique.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Sur la formation d'acide indol-3-acétique dans l'action de* Bacterium tumefaciens *sur le tryptophane*. Note de M. **Albert Berthelot** et Mlle **Germaine Amoureux**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

Les tumeurs déterminées par l'acide indol-3-acétique chez de jeunes plantes de Soleil cultivées aseptiquement étant analogues à celles que nous

obtenions couramment par inoculation de *Bacterium tumefaciens* ([1]), il nous a paru nécessaire d'établir définitivement si cet agent pathogène n'était pas un actif producteur d'acide indol-3-acétique, contrairement à ce qui semblait résulter d'essais sommaires effectués avec un milieu mal approprié à ce genre de recherches ([2]).

Parmi les solutions nutritives que nous avons essayées en nous inspirant des travaux de l'un de nous et de Dominique Bertrand ([3]), les meilleurs résultats nous ont été donnés par la formule suivante : PO^4K^2H 0,75; PO^4KH^2 0,75; SO^4Mg crist. 0,50; $SO^4(NH^4)^2$ 0,50; chlorhydrate de cystéine 0,02; tryptophane 0,50; solution oligodynamique X gouttes ([4]); pyruvate de sodium 5; glucose 2,50; pour 1 litre d'eau distillée. La solution, dans un petit volume d'eau distillée, du pyruvate et du glucose était filtrée sur bougie L_5. On l'ajoutait ensuite aseptiquement à la solution des autres éléments préalablement répartie, par 100^{cm^3}, en flacons de Pyrex et stérilisée 20 minutes à 110-112°.

Quant à la recherche de l'acide indol-3-acétique dans les cultures, nous avons employé exclusivement comme réactif, à cause de sa sensibilité, l'acide chlorhydrique additionné de traces de perchlorure de fer; après chauffage à 100°, puis refroidissement, la matière colorante formée était rassemblée par le butanol.

Dans ces conditions nous avons constaté qu'à 30°, *B. tumefaciens* détermine rapidement la formation d'acide indol-3-acétique aux dépens du tryptophane. Après 24 heures la réaction est déjà très accusée; elle s'accentue jusqu'au quatrième jour. Deux expériences effectuées l'une en juin, l'autre en septembre dernier, nous ont donné des résultats identiques. C'est sur les cultures de ce dernier essai que nous avons caractérisé définitivement l'acide indol-3-acétique par les spectres d'absorption ([5]), en comparant le produit trouvé dans nos cultures avec l'acide de synthèse bien exempt d'indol.

([1]) A. Berthelot et Mlle G. Amoureux, *Comptes rendus*, 203, 1936, p. 629.

([2]) G. Amoureux, *Ann. Inst. Pasteur*, 54, 1935, p. 750.

([3]) A. Berthelot, *Comptes rendus*, 153, 1911, p. 306; A. Berthelot et D.-M. Bertrand, *C. R. Soc. Biol.*, 71, 1911, p. 232; A. Berthelot, *C. R. Soc. Biol.*, 72, 1912, p. 595.

([4]) A. Berthelot, *Bull. Soc. Chim. Biol.*, 16, 1934, p. 1553.

([5]) A. Berthelot, *Ann. Inst. Pasteur*, 28, 1914, p. 839.

Alors que nous commencions à préciser l'influence de divers facteurs sur la formation de l'acide indol-3-acétique par *B. tumefaciens*, nous avons eu connaissance des intéressants travaux de Brown et Gardner et de Link et Wilcox (6) qui, avec une technique différente et sans identification spectroscopique, aboutissent aux mêmes conclusions que nous. Ces auteurs ont même obtenu des réactions néoplasiques en traitant des plants de Haricots et de Tomates avec le produit d'extraction de tumeurs à *B. tumefaciens*. En cela nous avions échoué, en 1935, en opérant avec des tumeurs et des plantes saines de *Pelargonium zonale*; mais on sait l'importance du choix de telle ou telle espèce végétale dans des expériences de ce genre. Les mêmes expérimentateurs ont fait leurs constatations sur des cultures âgées de trois semaines à trois mois, alors que dès le quatrième ou cinquième jour nous obtenions des cultures très riches en acide indol-3-acétique.

Quoi qu'il en soit, les recherches des auteurs américains et les nôtres se confirment et il paraît probable que l'acide indol-3-acétique joue un rôle important dans la genèse des tumeurs que détermine *B. tumefaciens*. On peut même se demander si une teneur exceptionnellement faible des sucs cellulaires en tryptophane n'est point, *parmi d'autres*, un des facteurs de l'immunité de certaines espèces végétales à l'égard de la Bactérie d'Erwin Smith.

Une autre question se pose : du moment que *B. tumefaciens* est producteur d'un composé chimiquement défini doué d'une telle activité cytoérétique et néoplastique, comment agit l'endotoxine de Boivin et de ses collaborateurs ? (7). Nous nous sommes demandé, comme d'ailleurs M. Boivin, si les solutions de toxine ne renfermaient pas des traces de l'acide indolique entraînées au cours de la préparation de l'antigène. Nous avons examiné à cet égard celles que nous possédions encore (8) et nous avons abouti à des résultats négatifs. Mais, comme la toxine dont nous disposions était déjà ancienne, nous allons reprendre, d'accord avec M. Boivin, nos recherches sur ce point important. D'ailleurs il est pos-

---

(6) N. A. Brown et F. E. Gardner, *Phytopath.*, 26, 1936, p. 708; G. H. Link et H. W. Wilcox, *Science*, 86, 1937, p. 126; G. K. Link et H. W. Wilcox, *Phytopath.*, 26, 1936, p. 100.

(7) Boivin, M. Marbé, Mme L. Mesrobeanu et P. Juster, *Comptes rendus*, 201, 1935, p. 984.

(8) A. Berthelot et Mlle G. Amoureux, *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 517.

sible que l'antigène de Boivin n'intervienne dans la genèse des tumeurs qu'indirectement, en agissant sur le métabolisme cellulaire, et cela parallèlement à l'action de l'acide indol-3-acétique d'origine microbienne.

PHYSIOLOGIE MICROBIENNE. — *L'hématine et l'acide ascorbique, facteurs de croissance pour le Flagellé* Schizotrypanum cruzi. Note de Mme **Marguerite Lwoff**, transmise par M. Félix Mesnil.

Isolé pour la première fois par Chagas en 1909, *Schizotrypanum cruzi* est parmi les Trypanosomes pathogènes un de ceux dont la culture est la plus aisée. En gélose N. N. N., en milieu de Noguchi ou de Wenyon, en bouillon-sang ou en eau peptonée-sang, on en obtient des cultures très abondantes et d'une très longue durée. Le sang total, qui constitue environ de la cinquième à la dixième partie de ces milieux, a jusqu'ici été considéré comme indispensable. Les facteurs de croissance nécessaires à *Schizotrypanum cruzi*, apportés par le sang, n'ont pas encore été déterminés. J'ai pu identifier deux d'entre eux, l'hématine et l'acide ascorbique.

Dans un milieu semi-solide, du type de ceux de Noguchi et de Wenyon : peptone pepsique d'arachide, 20; chlorure de sodium, 6; gélose, 2; eau distillée, 1000; NaOH q. s. pour pH 7,2 à 7,6, le sang total (sang défibriné de lapin par exemple) doit être ajouté en proportion assez grande pour qu'on obtienne un bon développement. En présence de sang dilué au 1/100e, la culture s'arrête dès les premiers repiquages, souvent dès le second. Le sérum inactivé (de lapin, de cheval, de mouton, de porc), dilué au 1/10e ou au 1/3 dans le milieu peptoné, ne permet pas d'entretenir la culture de *Schizotrypanum cruzi*. On peut effectuer au plus 2, 3 ou 4 repiquages suivant l'origine spécifique des sérums et la présence de traces d'hémoglobine; dans ces conditions, les cultures sont toujours très pauvres. Il en est de même des hématies lavées et hémolysées avec lesquelles on dépasse difficilement le premier repiquage. Le développement est par contre excellent et la culture indéfiniment repiquable si l'on ajoute sérum et hématies lavées, sérum inactivé de cheval et hématies de lapin par exemple. Ces constatations sont en accord avec les résultats de J. C. Ray [1] relatifs à diverses espèces de Leishmanies. La dilution optima de sérum

(1) *Indian Journal of medical Research*, 20, 1932, p. 355.

est 1/10e; quant aux hématies, leur dilution minima active, quoique plus élevée que celle du sérum, 1/1000e à 1/10000e, est relativement basse : mais surtout elle est extrêmement variable et impossible à fixer avec certitude. Ceci donnait des raisons de croire que si l'hématine était un facteur de croissance nécessaire à *Schizotrypanum cruzi*, sa nécessité n'apparaissant pas d'ailleurs *a priori* comme certaine, ce n'était pas le seul apporté par les globules rouges. En effet, l'hémine, ajoutée au sérum pour remplacer les hématies lavées, ne permet pas de culture en série du trypanosome; une autre substance entre donc en jeu.

Or, dès mes premières recherches, j'avais pensé que le sérum pouvait renfermer parfois une très faible quantité de cette substance des hématies. Étant données les conditions dans lesquelles étaient effectuées les repiquages, cette supposition permettait seule d'expliquer la possibilité d'un nombre restreint et irréguliers de subcultures dans le milieu peptoné additionné de sérum et d'hémine. D'autre part, l'action quantitative des globules rouges étant irrégulière, il semblait que ce facteur des hématies dût être une substance relativement labile, ce qui m'a permis de supposer que ce facteur labile pourrait être l'acide ascorbique (2). Cette hypothèse paraissait d'autant plus séduisante que je venais de constater la nécessité de l'aneurine pour divers *Strigomonas* et que l'existence d'autres vitamines communes aux Vertébrés et aux Trypanosomides était ainsi rendue vraisemblable.

J'ai utilisé une solution d'acide *l*-ascorbique synthétique (Roche) préparée immédiatement avant l'emploi. Les résultats se résument de la façon suivante :

Eau peptonée gélosée				o (1)
»	»	»	+ sang total	+ (2)
»	»	»	+ sérum	o
»	»	»	+ hématies lavées	o
»	»	»	+ sérum + hématies lavées	+
»	»	»	+ sérum + hémine	o
»	»	»	+ sérum + acide *l*-ascorbique	o
»	»	»	+ sérum + hémine + acide *l*-ascorbique	+
»	»	»	+ hémine + acide *l*-ascorbique	o

(1) pas de culture. (2) culture.

(2) L'acide ascorbique est en effet assez rapidement détruit dans le sérum (A. E. Keilie et Silva, *Bioch. Journal*, 30, 1936, p. 361, et P. Meunier, *Annales des Fermentations*, 3, 1937, p. 156).

Dans le milieu peptoné additionné de sérum, d'hémine et d'acide ascorbique, le développement est très abondant, en tous points comparable à celui qu'on observe avec les meilleurs milieux usuels au sang total. 7 repiquages, à 9 jours environ d'intervalle, sont actuellement effectués. La suppression soit de l'hématine, soit de l'acide ascorbique, soit du sérum, entraîne l'arrêt de la culture, parfois même au premier repiquage. L'hémine et l'acide ascorbique sont donc bien des facteurs de croissance pour *Schizotrypanum cruzi*.

Quant au sérum, il apporte lui aussi une ou des substances indispensables qui restent à déterminer; provisoirement, je les désignerai sous le nom de *facteur TS*. Peut-être le cholestérol, dont le rôle a été mis en évidence par R. Cailleau (1935-1937) pour *Trichomonas columbæ*, intervient-il aussi dans la nutrition de *Schizotrypanum cruzi*.

Quoi qu'il en soit, des expériences parallèles sur *Leishmania tropica* montrent que ce Flagellé a besoin, comme *S. cruzi*, d'hématine, d'acide ascorbique et du facteur TS. Ces constatations ne sauraient cependant être généralisées à toutes les espèces de Leishmanies qui peuvent montrer, comme je l'ai observé, des besoins différents.

Si l'action de l'hématine est reconnue pour de nombreuses Bactéries et Protozoaires, c'est à ma connaissance la première fois que l'on montre la nécessité de l'acide ascorbique pour un microorganisme. Les problèmes relatifs à son action quantitative et à sa spécificité sont à l'étude.

A 15^{h}45^{m} l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 17^{h}15^{m}.

E. P.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages présentés pendant les séances de janvier 1938.

Institut de France. Académie des Sciences. Observatoire d'Abbadia. *Catalogue résumant dix années d'observations* (1920-1930) *contenant* 1246 *étoiles dont* 764 *fondamentales de* + 46° *à* — 26° *réduites à* 1925,0. Hendaye, Imprimerie de l'Observatoire d'Abbadia, 1937; 1 fasc. 32cm,5.

Office national des combustibles liquides. École nationale des Moteurs à combustion et à explosion. *Leçons sur la Mécanique et la Résistance des matériaux appliquées aux moteurs à combustion interne.* Première partie, *Mécanique;* deuxième partie, *Résistance des matériaux,* par Gérard Delanghe; 2 vol. autographiés 27cm (présenté par M. L. Guillet).

La chaudière de la locomotive, par Charles Godard. Beyrouth, 1934; 3 vol. autographiés 31cm.

Harvey, iniciador del metodo experimental, par Jose Joaquin Izquierdo. Mexico, Ediciones ciencia, 1936; 1 vol. 23cm,5.

La Fisiologia en Mexico, par Jose Joaquin Izquierdo. Mexico, Ediciones Ciencia, 1934; 1 vol. 23cm,5.

Essai sur les fondements de la géométrie euclidienne, par Julien Malengreau. Lausanne, Librairie Payot et Cie, 1938; 1 vol. 22cm,5.

Études géodésiques, par Eugène Fichot. Extrait des *Annales hydrographiques.* Paris, Imprimerie nationale, s. d.; 1 vol. 23cm.

Faune de France, **32** *Ixodoïdés,* par G. Senevet, in *Office central de faunistique.* Paris, Paul Lechevalier, 1937; 1 vol. 25cm,5 (présenté par M. L. Bouvier).

Les ultravirus des maladies humaines, par C. Levaditi et P. Lépine. Paris, Librairie Maloine, 1938; 1 vol. 25cm (présenté par M. E. Leclainche).

Figures de savants. Tome IV. *L'Académie des Sciences et l'étude de la France d'Outre-mer de la fin du XVIIe siècle au début du XIXe,* par Alfred Lacroix. Paris, Gauthier-Villars, 1938; 1 vol. 25cm,5.

D'Arsonval. Soixante-cinq ans à travers la Science, par Louis Chauvois. Paris, Éditions J. Oliven, 1937; 1 vol. 25cm,5 (présenté par M. L. Lapicque).

Actas y Trabajos. Tome I. *Session inaugural. Session de clausura. Relaciones y trabajos sobre tratamiento de las infecciones agudas piógenas,* in *Cuarto Congreso*

nacional de medicina. Buenos-Ayres, La Semana Médica, 1931; 1 vol. 26^{cm},5 (en langue espagnole).

Actas y Trabajos. Tomo II. *Trabajos presentados a la Sección Clinica Médica,* in *Cuarto Congreso nacional de medicina.* Buenos-Ayres, La Semana Médica, 1932; 1 vol. 26^{cm},5 (en langue espagnole).

Actas y Trabajos. Tomo III. *Trabajos presentados a la Sección Terapéutica y Farmacologia,* in *Cuarto Congreso nacional de medicina,* 1932. Buenos-Ayres, La Semana Médica, 1932; 1 vol. 26^{cm},5 (en langue espagnole).

Actas y Trabajos. Tomo IV. *Trabajos presentados a la Sección Pediatria y Puericultura,* in *Cuarto Congreso nacional de medicina,* 1932. Buenos-Ayres, La Semana Médica, 1932; 1 vol. 26^{cm},5 (en langue espagnole).

Actas y Trabajos. Tomo V. *Trabajos presentados a la Sección Obstetricia y Ginecologia,* in *Cuarto Congreso nacional de medicina.* Buenos-Ayres, La Semana Médica, 1932; 1 vol. 26^{cm},5 (en langue espagnole).

Festgabe aus Anlass der 250. Wiederkehr des Tages der erhebung der am 1. januar 1652 gegründeten privaten Akademie zur Sacri Romani Imperii Academia Caesareo-Leopoldina Naturae Curiosorum durch Leopold I (7 August 1687). Herausgegeben im Namen der Kaiserlich Leopoldinisch-Carolinisch Deutschen Akademie der naturforscher von EMIL ABDERHALDEN. Halle (Saale), 1937; 1 vol. 25^{cm},5 (en langue allemande).

Bericht über den Verlauf der Feier der 250. Wiederkehr des Tages der Erhebung der am 1. jan. 1652 gegründeten Academia Naturae Curiosorum zur « Sacri Romani Imperii Academia Caesareo-Leopoldina Naturae Curiosorum » durch Leopold I (28 *bis* 30 Mai 1937), von EMIL ABDERHALDEN. Halle (Saale), 1937; 1 vol. 25^{cm},5 (en langue allemande).

(*A suivre.*)